Podstawa programowa z matematyki

I. Założenia wstępne

Rozwój umiejętności matematycznych ucznia w klasach IV–VIII w sposób naturalny dzieli się na dwa etapy związane z rozwojem intelektualnym ucznia. W niniejszej podstawie, pierwszy z tych etapów nazwany jest etapem konkretnym, drugi zaś etapem formalnym.

Etap konkretny to czas, w którym uczeń poznaje matematykę za pomocą konkretnych odniesień do rzeczywistości. Wszelkie wprowadzane w tym czasie pojęcia i terminy są powiązane z obiektami występującymi w otaczającym świecie. Wspieranie rozwoju matematycznego ucznia polega przede wszystkim na nauce wnioskowania na bazie konkretnych obiektów. W nauczaniu nacisk kładzie się na arytmetykę i elementarną geometrię.

Etap formalny to czas, kiedy następuje rozwój umiejętności abstrakcyjnych, a uczeń potrafi prowadzić rozumowanie z wykorzystaniem obiektów abstrakcyjnych. Dopiero na tym etapie rozwoju uczeń jest w stanie zrozumieć niektóre pojęcia algebraiczne, pojęcie prawdopodobieństwa czy bardziej zaawansowane własności figur geometrycznych. W tym czasie rozpoczyna się nauka, czym jest dowód matematyczny; uczeń może samodzielnie przeprowadzać dowody matematyczne w prostych sytuacjach.

Aby zachować ten naturalny podział na etapy konkretny i formalny, zarówno treści nauczania, jak i zalecenia metodyczne podzielono na dwie części. Etap konkretny został przewidziany na klasy IV–VI, etap formalny na klasy VII–VIII. Granice tych etapów mogą w przyszłości ulec przesunięciu, od kiedy w klasach IV–VIII będzie większość dzieci, które rozpoczęły naukę w I klasie szkoły podstawowej jako siedmiolatki. Na przykład, będzie można rozszerzyć nauczanie statystyki w klasie szóstej o treści z punktu 34.

Rezygnacja ze sprawdzianu w klasie VI pozwoli nauczycielom nie tylko na realizację materiału przewidzianego dla klas IV–VI, ale także na powtórzenie i rozszerzenie treści oraz doskonalenie umiejętności przypisanych do etapu konkretnego. Takie powtórzenie jest konieczne, aby w etap formalny uczniowie wchodzili z dobrze opanowanymi umiejętnościami nauczanymi w etapie konkretnym. Konieczność zachowania ciągłości systemu kształcenia wymusza zachowanie podstawy programowej dla klas IV–VI w formie niemal niezmienionej. Przesunięcie części nauczanych treści z późniejszego etapu na klasy IV–VI mogłoby bowiem doprowadzić do sytuacji, że uczniowie, którzy w roku 2016/2017 są w klasie VI, nie zrealizują w ogóle części materiału przewidzianego w podstawie programowej.

W niniejszej podstawie treści nauczania podzielono na trzy części.

1. Etap konkretny. Treści kształcenia przewidziane dla tego etapu odpowiadają treściom nauczanym dotąd w klasach IV–VI. W stosunku do poprzedniej podstawy programowej nie dokonano istotnych zmian.

2. Na zakończenie etapu konkretnego przewidziane jest powtórzenie i rozszerzenie nauczanych treści. Rozszerzenia są dwojakiego rodzaju. Po pierwsze, niektóre treści pojawiające się implicite w podstawie dla klas IV–VI, takie jak NWD, pojawiają się w sposób jawny. Po drugie, rozszerzony został zakres nauczania niektórych treści, tak jak zwiększenie zakresu liczb rzymskich, bądź bardziej skomplikowane przykłady obliczania pól.

3. Etap formalny, dla którego konstrukcji punktem wyjścia była istniejąca podstawa gimnazjalna. Nie było wskazanym ścieśnienie podstawy trzyletniego gimnazjum do dwóch lat, dlatego część materiału z tej istniejącej podstawy przeniesiono do szkoły ponadpodstawowej. Szczegółowa lista treści nauczania z poprzedniej podstawy programowej dla gimnazjum, które zostały przesunięte do szkół ponadpodstawowych, znajduje się na końcu niniejszego rozdziału.

Z założenia punkty 1. i 2. przewidziane są na klasy IV–VI, a punkt 3. na klasy VII–VIII.

Przy realizacji podstawy programowej należy zwrócić uwagę na prymat *jakości* nauczania nad *ilością*, a więc należy raczej rozwiązywać trudniejsze zadania, wymagające wnioskowania niż wyprzedzać program. Ten nacisk na kształtowanie myślenia matematycznego był położony już w poprzednich podstawach programowych z matematyki i jest uważany przez część ekspertów za jedną z przyczyn poprawienia wyników polskich uczniów w testach PISA. Ponadto głębokie zrozumienie stosunkowo prostych treści rozwija dojrzałość matematyczną lepiej niż pobieżne wytłumaczenie dużej partii materiału.

Dojrzałość matematyczna, z kolei, ułatwia wprowadzenie trudniejszych treści takich jak funkcje czy zaawansowana geometria w szkole ponadpodstawowej.

W etapie konkretnym, jak uzasadniono powyżej, pozostawiono podstawę programową bez większych zmian. W klasie VI, w przypadku zrealizowania programu kształcenia w krótszym czasie, można sięgnąć po zadania trudniejsze, wymagające bardziej złożonego rozumowania, unikając przedwczesnego wprowadzania treści, które są niedostosowane do etapu rozwoju intelektualnego uczniów. Poza zadaniami dostępnymi w dopuszczonych do użytku podręcznikach można sięgać, w razie potrzeby, po zadania ogólnie dostępne na stronach internetowych, na przykład po zadania z konkursów matematycznych szkół podstawowych.

Elementy rozumowania abstrakcyjnego powinny być przedstawiane na przykładach zadań arytmetycznych i geometrycznych. Nauka dowodzenia to jeden z najistotniejszych elementów nauczania matematyki. Koniecznie należy rozpoczynać ją już w szkole podstawowej (w wieku 14–15 lat), by w dalszych etapach kształcenia móc przejść do bardziej złożonych rozumowań.

Pojęcie funkcji przeniesiono do szkoły ponadpodstawowej. Tam będzie można omówić je dokładniej, a większa liczba przykładów ułatwi uczniom zrozumienie istoty tego pojęcia. Z tego też wynika przeniesienie do szkoły ponadpodstawowej układów równań. Naturalne jest bowiem ilustrowanie układów równań w układzie współrzędnych; do tego niezbędne jest użycie równania prostej, ściśle związanego z wykresem funkcji liniowej.

Ponadto na okres ponadpodstawowy przesunięto wprowadzenie pojęcia potęgi o wykładniku zerowym i ujemnym (pozostawiono jedynie notację wykładniczą); naturalne jest uczenie tego pojęcia razem z pojęciem potęgi o wykładniku wymiernym. Pojęcie pierwiastka kwadratowego pozostawiono w podstawie dla klas VII–VIII ze względu na wykorzystanie go w twierdzeniu Pitagorasa i w obliczaniu boku kwadratu o zadanym polu. Do szkoły ponadpodstawowej przeniesiono elementy geometrii okręgu (z wyjątkiem obliczenia długości okręgu i pola koła) oraz własności brył obrotowych.

Nauczanie rachunku prawdopodobieństwa w szkole jest ważne. Jest to jeden z bardziej istotnych działów matematyki wykorzystywanych w zastosowaniach. Dlatego warto, aby uczeń zapoznał się z elementami rachunku prawdopodobieństwa możliwie wcześnie i by mógł wcześniej przyswoić sobie „probabilistyczny" sposób patrzenia na rzeczywistość. Jednocześnie elementarna kombinatoryka (korzystająca wyłącznie z reguł dodawania i mnożenia) jest działem matematyki rozwijającym twórcze myślenie matematyczne. Dlatego uznano za konieczne wprowadzenie elementów kombinatoryki do szkoły możliwie wcześnie. Dobrym momentem na wprowadzenie kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa, nie tylko ograniczonego do najprostszych doświadczeń losowych, jest czas po egzaminie końcowym w VIII klasie.

W podstawie programowej etapu formalnego nie pojawiają się wzory skróconego mnożenia. Jest to zabieg celowy. O wiele istotniejsze jest, aby uczeń umiał wymnożyć dwa wyrażenia algebraiczne w nawiasach, w tym np. $(a+b)(a-b)$, niż żeby umiał na pamięć wzór, który jest *de facto* sztuczką rachunkową. Do wzorów skróconego mnożenia często przykłada się zbyt dużą wagę kosztem nauczania mnożenia wyrażeń algebraicznych. Nauczyciel może uczyć tych wzorów przy okazji wyrażeń algebraicznych, ich znajomość nie będzie jednak wymagane na egzaminie w klasie VIII.

Do większości punktów w treściach nauczania dopisano przykładowe zadania, których cel jest dwojaki. Po pierwsze pokazują, na jakim poziomie należy nauczać danych treści. Po drugie często precyzują sformułowanie, które pojawia się w podstawie programowej. Do części zadań podano odpowiedzi, by dodatkowo zaznaczyć konieczny, lub wymagany na egzaminie w klasie VIII, poziom opanowania umiejętności, których zastosowania wymaga rozwiązanie formułowanych problemów.

Z poprzedniej podstawy programowej do gimnazjum następujące zagadnienia zostały przeniesione do szkoły ponadpodstawowej:

- potęgi o wykładnikach niedodatnich;
- wyłączanie poza nawias jednomianu z sumy algebraicznej;
- równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą sprzeczne i tożsamościowe;
- układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi;
- elementy geometrii okręgu, w tym wielokąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu, zastosowania twierdzenia Pitagorasa do obliczeń w geometrii okręgu, długość łuku i pole wycinka kołowego;
- podobieństwo trójkątów;

- konstrukcje geometryczne;
- bryły obrotowe: walec, stożek, kula; obliczanie objętości i pola powierzchni walca, stożka i kuli;
- funkcje; proporcjonalność prosta i odwrotna.

Cele kształcenia

Celem nauki matematyki na etapie myślenia konkretnego jest rozwinięcie umiejętności rachunkowej na poziomie umożliwiającym rozwiązywanie problemów z innych przedmiotów w klasach IV–VIII, a także wyrobienie intuicji matematycznych właściwych danemu wiekowi. Jednym z zadań w procesie kształcenia ucznia jest rozwinięcie umiejętności wnioskowania, zdolności analitycznych, a więc umiejętności przetwarzania poszczególnych informacji ze sformułowanego problemu; myślenia strategicznego, a więc umiejętności planowania kolejnych kroków w celu rozwiązania problemu i dzielenia rozwiązania złożonego problemu na etapy, a także umiejętności krytycznego spojrzenia na rozwiązanie zadania.

Pod koniec VIII klasy wymagane są ponadto myślenie matematyczne i umiejętność dowodzenia na poziomie, który umożliwi zrozumienie matematyki stosowanej w szkołach ponadpodstawowych w innych przedmiotach.

W szczególności oznacza to, że:

I. W zakresie sprawności rachunkowej
   1. Uczeń sprawnie wykonuje nieskomplikowane obliczenia pamięciowe na liczbach naturalnych, całkowitych i ułamkach. Ponadto sprawnie wykonuje cztery działania pisemne na liczbach wymiernych i używa kalkulatora do wykonywania obliczeń, bądź weryfikowania wyników działań wykonanych pisemnie lub w pamięci.
   2. Uczeń korzysta ze wzorów i przekształca je w celu wyznaczenia określonej wielkości.

II. W zakresie wnioskowania
   1. Uczeń przeprowadza rozumowania, dostrzega regularności, podobieństwa i analogie, istotne cechy znanych obiektów oraz formułuje wnioski na ich podstawie.

2. Uczeń dobiera modele matematyczne do rozwiązywania problemów, stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz umiejętności rachunkowe.

III. W zakresie rozumienia i tworzenia tekstów matematycznych

1. Uczeń odczytuje i interpretuje dane przedstawione w różnej formie oraz przetwarza je w celu uzyskania dodatkowych informacji.
2. Uczeń zapisuje wyrażenia arytmetyczne prowadzące do rozwiązania zadanego problemu.
3. Uczeń formułuje odpowiedzi, uzasadnia je, stosując poznane pojęcia.
4. Uczeń używa języka matematycznego i symboliki matematycznej do przedstawienia własnego rozumowania oraz do opisu zależności i relacji, w szczególności do opisu zjawisk z życia codziennego.

IV. W zakresie krytycznego spojrzenia na wyniki

1. Uczeń weryfikuje i interpretuje otrzymane wyniki lub rozwiązanie zadania na przykład poprzez: szacowanie, sprawdzanie, czy otrzymane rozwiązanie spełnia wszystkie warunki zadania, ocenianie, czy rząd wielkości otrzymanego wyniku jest odpowiedni.
2. Uczeń odróżnia dowód od przykładu, ma świadomość, że jeden kontrprzykład wystarcza do odrzucenia hipotezy.

Treści nauczania

I. Etap konkretny

1. Liczby naturalne w dziesiątkowym układzie pozycyjnym.

Uczeń powinien:

1.1. zapisywać i odczytywać liczby naturalne wielocyfrowe;
1.2. interpretować liczby naturalne na osi liczbowej;
1.3. porównywać liczby naturalne;
1.4. zaokrąglać liczby naturalne;
1.5. liczby w zakresie do 30 zapisane w systemie rzymskim przedstawiać w systemie dziesiątkowym, a zapisane w systemie dziesiątkowym przedstawiać w systemie rzymskim.

Przykładowe zadania

Z.1.a) Przeczytaj liczbę 2 307 102.

Z.1.b) Zaznacz na osi liczbowej liczby 120, 140, 165 – dobierz jednostkę tak, aby było to możliwe.

Z.1.c) Porównaj dwie liczby:

I. 3078 i 780,   II. 270006 i 270060.

Z.1.d) Liczby XIV i XIX zapisz w systemie dziesiątkowym.

Z.1.e) Zaokrąglij liczbę 78907 do:

I. tysięcy,   II. setek,   III. dziesiątek,   IV. jedności.

2. Działania na liczbach naturalnych.

Uczeń powinien:

2.1. dodawać i odejmować w pamięci liczby naturalne dwucyfrowe lub większe o stopniu trudności jak w zadaniach poniżej; liczbę jednocyfrową dodawać do dowolnej liczby naturalnej i odejmować od dowolnej liczby naturalnej;

2.2. dodawać i odejmować liczby naturalne wielocyfrowe sposobem pisemnym i przy pomocy kalkulatora;

2.3. mnożyć i dzielić liczbę naturalną przez liczbę naturalną jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową sposobem pisemnym, w pamięci (w najprostszych przykładach) i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach);

2.4. wykonywać dzielenie z resztą liczb naturalnych;

2.5. stosować wygodne dla siebie sposoby ułatwiające obliczenia, w tym przemienność i łączność dodawania i mnożenia;

2.6. porównywać liczby naturalne z wykorzystaniem ich różnicy lub ilorazu;

2.7. rozpoznawać liczby podzielne przez 2, 3, 4, 5, 9, 10, 100;

2.8. rozpoznawać liczbę złożoną, gdy jest ona jednocyfrowa lub dwucyfrowa, a także, gdy na istnienie dzielnika właściwego wskazuje cecha podzielności;

2.9. rozkładać liczby dwucyfrowe na czynniki pierwsze;

2.10. obliczać kwadraty i sześciany liczb naturalnych;

2.11. stosować reguły dotyczące kolejności wykonywania działań, 2.12. szacować wyniki działań.

Przykładowe zadania

Z.2.a) Oblicz w pamięci:

$180+420$, $169-130$, $60\cdot 30$, $1800:200$,

$2007+800$, $235\cdot 2$, $630:3$, $630:30$,

$1000:8$.

Z.2.b) Oblicz sposobem pisemnym:

$360\cdot 480$, $1675\cdot 13$, $21237+4386$,

$43805-983$, $48037:8$, $4320:40$.

Z.2.c) Oblicz: $2\cdot 179\cdot 5$, $785+37+105$, $20\cdot 19-19\cdot 18$.

Z.2.d) Oblicz, o ile liczba 164 jest większa od liczby 16.

Z.2.e) O ile liczba 16 jest mniejsza od liczby 164?

Z.2.f) Ile razy liczba 17 jest mniejsza od liczby 68?

Z.2.g) Ile razy liczba 68 jest większa od liczby 17?

Z.2.h) Czy liczba 6230 jest podzielna przez 9?

Z.2.i) Spośród liczb 375, 1050, 2015, 350 wybierz liczby jednocześnie podzielne przez 3 i przez 5.

Z.2.j) Spośród liczb 111, 112, 171, 103, 135 jedna jest liczbą pierwszą. Która to liczba?

Z.2.k) Oblicz 81^2, 32^2, 11^3.

Z.2.l) Oblicz: $36+120:3$, $180:2\cdot 3-6^2\cdot 2$, $\left(3^3+2^3\right)\cdot 2+18:3^2$, $420-30+90$.

Z.2.m) Paweł chce kupić 3 fotele po 488 zł i kanapę za 1249 zł. Czy wystarczy mu 2700 zł?

Z.2.n) Zapisz liczbę, która jest o 16 większa od liczby 14.

Z.2.o) Zapisz liczbę, która jest 8 razy mniejsza od liczby 1640.

3. Liczby całkowite.

Uczeń powinien:

3.1. podawać praktyczne przykłady stosowania liczb ujemnych;

3.2. interpretować liczby całkowite na osi liczbowej;

3.3. obliczać wartość bezwzględną;

3.4. porównywać liczby całkowite;

3.5. wykonywać proste rachunki pamięciowe na liczbach całkowitych.

Przykładowe zadania

Z.3.a) Zaznacz na osi liczbowej liczby: $-8,\ 14,\ -5,\ -13$.

Z.3.b) Porównaj liczby: $38 \ldots -3$, $-109 \ldots -108$, $0 \ldots -75$, $35 \ldots |-35|$.

Z.3.c) Oblicz: $36-2\cdot 27$, $-8^2+16\cdot(-2)$, $64:(-2)^2-80:(-4)^2$, $-18-12:(-2)\cdot(-3)$,

$50-(-17)+19$, $47-83+17$.

4. Ułamki zwykłe i dziesiętne.

Uczeń powinien:

4.1. umieć opisać część danej całości za pomocą ułamka;

4.2. przedstawiać ułamek jako iloraz liczb naturalnych, a iloraz liczb naturalnych jako ułamek zwykły;

4.3. skracać i rozszerzać ułamki zwykłe;

4.4. sprowadzać ułamki zwykłe do wspólnego mianownika;

4.5. przedstawiać ułamki niewłaściwe w postaci liczby mieszanej, a liczbę mieszaną w postaci ułamka niewłaściwego;

4.6. zapisywać wyrażenia dwumianowane w postaci ułamka dziesiętnego i odwrotnie;

4.7. zaznaczać i odczytywać ułamki zwykłe i dziesiętne na osi liczbowej oraz odczytywać ułamki zwykłe i dziesiętne zaznaczone na osi liczbowej;

4.8. zapisywać ułamek dziesiętny skończony w postaci ułamka zwykłego;

4.9. zamieniać ułamki zwykłe o mianownikach będących dzielnikami liczb 10, 100, 1000 itd. na ułamki dziesiętne skończone dowolną metodą (przez rozszerzanie ułamków zwykłych, dzielenie licznika przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora);

4.10. zapisywać ułamki zwykłe o mianownikach innych niż wymienione w punkcie powyżej w postaci rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego (z użyciem wielokropka po ostatniej cyfrze), uzyskane w wyniku dzielenia licznika przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora;

4.11. zaokrąglać ułamki dziesiętne;

4.12. porównywać ułamki (zwykłe i dziesiętne).

Przykładowe zadania

Z.4.a) Napisz jaką częścią największej liczby trzycyfrowej jest największa liczba dwucyfrowa? Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

Z.4.b) Książka ma 246 stron. Ustal, jak równomiernie rozłożyć czytanie książki w ciągu tygodnia, by liczby stron przeczytanych w poszczególnych dniach były identyczne lub różniły się o 1.

Z.4.c) Sprowadź następujące ułamki do możliwie najmniejszego wspólnego mianownika:

$$\frac{2}{3},\ \frac{5}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{12},\ \frac{5}{8},\ \frac{17}{24},\ \frac{11}{12}.$$

Z.4.d) Licznik pewnego ułamka jest liczbą między 40 a 60, natomiast jego mianownik jest liczbą między 20 a 40. Podaj liczbę całkowitą równą temu ułamkowi lub dwie kolejne liczby całkowite, pomiędzy którymi znajduje się ten ułamek. Rozważ wszystkie przypadki.

Z.4.e) Ilu centymetrom odpowiada 2,6 m?

Z.4.f) Zamień na wyrażenia dwumianowane:

I. $2{,}02\,\text{km} = \ldots\,\text{km} \ldots\,\text{m}$ II. $17{,}54\,\text{m} = \ldots\,\text{m} \ldots\,\text{cm}$ III. $11527\ \text{m} = \ldots\,\text{km} \ldots\,\text{m}$.

Z.4.g) Przyjmując odpowiednią jednostkę zaznacz na osi liczbowej liczby:

$$0{,}75,\ \frac{2}{5},\ \frac{12}{10},\ 3{,}2,\ \frac{57}{10},\ \frac{1}{4},\ 1\frac{6}{8}.$$

Z.4.h) Podaj rozwinięcia dziesiętne podanych ułamków:

$$\frac{2}{5},\ \frac{4}{15},\ \frac{7}{8},\ \frac{5}{21},\ \frac{15}{16},\ \frac{3}{250},\ \frac{1}{18},\ \frac{2}{3}.$$

Z.4.i) Zamień podane ułamki na ułamki dziesiętne. Podaj ich przybliżenia z dokładnością do części setnych:

$$\frac{3}{7},\ \frac{1}{13},\ \frac{11}{16},\ \frac{11}{15},\ \frac{4}{35},\ \frac{7}{9}.$$

Z.4.j) Porównaj ułamki: $\frac{1}{3} \ldots 0{,}4$, $1{,}81 \ldots \frac{11}{6}$, $2{,}5 \ldots 2\frac{4}{7}$.

5. Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych.

Uczeń powinien:

5.1. dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić ułamki zwykłe o mianownikach jedno- lub dwucyfrowych, a także liczby mieszane;

5.2. dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić ułamki dziesiętne w pamięci (w przykładach najprostszych), pisemnie i za pomocą kalkulatora (w przykładach trudnych);

5.3. wykonywać nieskomplikowane rachunki, w których występują jednocześnie ułamki zwykłe i dziesiętne;

5.4. porównywać ułamki z wykorzystaniem ich różnicy;

5.5. obliczać ułamek danej liczby naturalnej;

5.6. obliczać kwadraty i sześciany ułamków zwykłych i dziesiętnych oraz liczb mieszanych;

5.7. obliczać wartość prostych wyrażeń arytmetycznych, stosując reguły dotyczące kolejności wykonywania działań;

5.8. wykonywać działania na ułamkach dziesiętnych, używając własnych, poprawnych strategii lub za pomocą kalkulatora;

5.9. szacować wyniki działań.

Przykładowe zadania:

Z.5.a) Oblicz: I. $\frac{3}{4}+1,25\cdot 3$, II. $\left(4,8-1\frac{3}{5}\right)+\frac{2}{3}$, III. $0,4\cdot 0,3+4,5:15$,

IV. $2,75+1\frac{2}{3}\cdot 5\frac{2}{5}$, V. $\left(1\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{9}{16}-\frac{1}{16}\cdot 15$.

Z.5.b) Joasia kupiła 3 książki. Za jedną zapłaciła 8,40 zł, za drugą 3,7 zł. Trzecia książka kosztowała dwa razy tyle, co druga. Ile reszty otrzymała, jeśli zapłaciła banknotem 50 zł?

Z.5.c) Kilogram winogron kosztuje 12 zł. Ile trzeba zapłacić za 1,3 kg tych owoców?

Z.5.d) Kilogram buraków kosztuje 1,8 zł. Ile ważyły zakupione buraki, jeśli zapłacono za nie 54 grosze?

Z.5.e) Krzyś przeczytał 40 stron książki. Zostało mu jeszcze $\frac{3}{5}$ książki do przeczytania. Ile stron ma ta książka?

6. Elementy algebry.

Uczeń powinien:

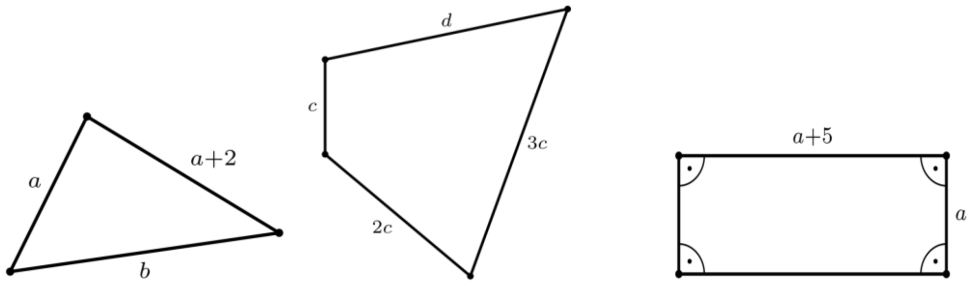
6.1. korzystać z nieskomplikowanych wzorów, w których występują oznaczenia literowe, opisać wzór słowami;

6.2. stosować oznaczenia literowe nieznanych wielkości liczbowych i zapisywać proste wyrażenia algebraiczne na podstawie informacji osadzonych w kontekście praktycznym;

6.3. rozwiązywać równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą występującą po jednej stronie równania (poprzez zgadywanie, dopełnianie lub wykonanie działania przeciwnego).

Przykładowe zadania

Z.6.a) Zapisz za pomocą wyrażeń algebraicznych obwody poniższych figur:



Z.6.b) Rozwiąż równanie: I. $(x+5)\cdot 2=16$, II. $\frac{x-2}{3}=4$, III. $\frac{2}{7}x+2=5\frac{1}{3}$.

7. Proste i odcinki.

Uczeń powinien:

7.1. rozpoznawać i nazywać figury: punkt, prosta, półprosta, odcinek;

7.2. rozpoznawać proste i odcinki prostopadłe i równoległe;

7.3. umieć narysować pary odcinków prostopadłych i równoległych;

7.4. mierzyć odcinek z dokładnością do 1 mm;

7.5. wiedzieć, że aby znaleźć odległość punktu od prostej, należy znaleźć długość odpowiedniego odcinka prostopadłego do prostej.

Przykładowe zadania

Z.7.a) Zaznacz dwa różne punkty *A* i *B*. Poprowadź przez nie prostą i zaznacz na niej punkt *C*, leżący między punktami *A* i *B*.

Z.7.b) Zaznacz dwa różne punkty *E* i *F* i narysuj prostą *EF*. Zaznacz na niej punkt *H* w taki sposób, aby odcinek *EH* była dwa razy dłuższy od odcinka *FH*.

Z.7.c) Narysuj prostą *p*. Zaznacz na niej 3 różne punkty *A*, *B* i *C*. Odczytaj i zapisz wszystkie powstałe w ten sposób półproste i odcinki.

Z.7.d) Odcinki *AB* i *CD* są prostopadłe, odcinki *CD* i *EF* są równoległe oraz odcinki *EF* i *DF* są prostopadłe. Określ wzajemne położenie odcinków *DF* oraz *AB*. Wykonaj odpowiedni rysunek.

8. Kąty.

Uczeń powinien:

8.1. umieć wskazać w dowolnym kącie ramiona i wierzchołek;

8.2. mierzyć z dokładnością do $1°$ kąty mniejsze niż $180°$;

8.3. rysować kąty mniejsze od $180°$;

8.4. rozpoznawać kąt prosty, ostry i rozwarty;

8.5. umieć porównać kąty;

8.6. rozpoznawać kąty wierzchołkowe i przyległe oraz korzystać z ich własności.

Przykładowe zadania

Z.8.a) Narysuj kąty: $35°$, $95°$, $175°$. Ustal, czy są to kąty ostre czy rozwarte.

Z.8.b) Jakim kątem będzie kąt przyległy do kąta:

I. prostego, II. ostrego, III. rozwartego?

Z.8.c) Oblicz miarę drugiego kąta przyległego, jeżeli miara pierwszego wynosi:

I. $75°$ II. $105°$ III. $147°$.

Z.8.d) Różnica dwóch kątów przyległych jest równa $50°$. Oblicz te kąty. Ustal, czy są to kąty ostre czy rozwarte.

9. Wielokąty, koła i okręgi.

Uczeń powinien:

9.1. rozpoznawać i nazywać trójkąty ostrokątne, prostokątne, rozwartokątne, równoboczne i równoramienne;

9.2. konstruować trójkąt o danych trzech bokach i ustalać możliwość zbudowania trójkąta na podstawie nierówności trójkąta;

9.3. stosować twierdzenie o sumie kątów trójkąta;

9.4. rozpoznawać i nazywać: kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok i trapez;

9.5. znać najważniejsze własności kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku i trapezu;

9.6. wskazać na rysunku cięciwę, średnicę oraz promień koła i okręgu;

9.7. rysować cięciwę koła i okręgu, a także, jeśli dany jest środek okręgu, rysować promień i średnicę.

Przykładowe zadania

Z.9.a) Znajdź po 2 sposoby sprawdzenia czy dany trójkąt:

I. ma każdy bok innej długości, II. jest równoboczny, III. jest równoramienny.

Z.9.b) O pewnym trójkącie równoramiennym wiadomo, że jeden z jego kątów ma miarę $60°$. Czy ten trójkąt jest równoboczny? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Z.9.c) Obwód trójkąta równoramiennego jest równy 45 cm. Długość ramienia tego trójkąta to 15 cm. Oblicz długość pozostałych boków tego trójkąta.

Z.9.d) Dobierz długość trzeciego odcinka tak, aby można było zbudować trójkąt:

I. $a = 2 \text{ dm}$, $b = 25 \text{ cm}$, $c = ?$

II. $a = 0,07 \text{ m}$, $b = 45 \text{ mm}$, $c = ?$

III. $a = 12 \text{cm}$, $b = 0,12 \text{ cm}$, $c = ?$

Z.9.e) Wymień wszystkie rodzaje czworokątów, w których przeciwległe kąty są równe.

Z.9.f) Narysuj okrąg o środku w punkcie S i promieniu 4cm. Zaznacz na nim punkty A, B, C w taki sposób, aby spełnione były warunki $AS = 4 \text{cm}$, $AB = 2 \text{cm}$, $BC = 8 \text{cm}$.

10. Bryły.

Uczeń powinien:

10.1. rozpoznawać graniastosłupy proste, ostrosłupy, walce, stożki i kule w sytuacjach praktycznych i wskazywać te bryły wśród innych modeli brył;

10.2. wskazywać wśród graniastosłupów prostopadłościany i sześciany i uzasadniać swój wybór;

10.3. rozpoznawać siatki graniastosłupów prostych i ostrosłupów;

10.4. rysować siatki prostopadłościanów.

Przykładowe zadania

Z.10.a) Narysuj trzy różne siatki graniastosłupa o podstawie kwadratowej o boku 2 cm i krawędzi bocznej 7 cm.

Z.10.b) Narysuj trzy różne siatki sześcianu o krawędzi 3 cm.

Z.10.c) Suma krawędzi pewnego graniastosłupa jest równa 72 dm, a wszystkie krawędzie podstawy mają równą długość. Oblicz jakie wymiary może mieć ten graniastosłup, jeśli wiadomo, że krawędź boczna jest równa 8 dm.

11. Obliczenia w geometrii.

Uczeń powinien:

11.1. umieć obliczyć obwód wielokąta o danych długościach boków;

11.2. obliczać pola: kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trójkąta, trapezu przedstawionych na rysunku oraz w sytuacjach praktycznych;

11.3. stosować jednostki pola: mm^2, cm^2, dm^2, m^2, km^2, ar, hektar (bez zamiany jednostek w trakcie obliczeń);

11.4. umieć obliczyć objętość i pole powierzchni prostopadłościanu przy danych długościach krawędzi;

11.5. stosować jednostki objętości i pojemności mililitr, litr, cm^2, dm^3, m^3;

11.6. obliczać miary kątów, stosując przy tym poznane własności kątów i wielokątów.

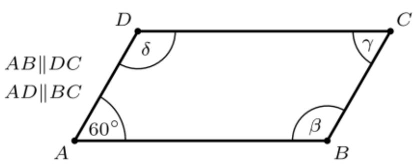
Przykładowe zadania

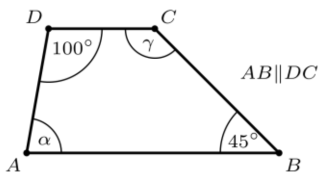
Z.11.a) Narysuj kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok o polu $8\ \mathrm{cm}^2$.

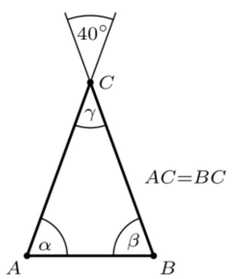
Z.11.b) Zaprojektuj prostopadłościan o objętości $2\ \mathrm{dm}^3$. Narysuj jego siatkę.

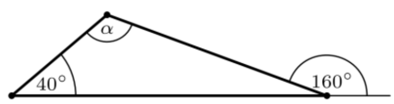
Z.11.c) Oblicz pole prostokąta, którego jeden bok jest trzy razy dłuższy od drugiego, a obwód jest równy $40\ \mathrm{cm}$.

Z.11.d) Oblicz miary zaznaczonych kątów:









12. Obliczenia praktyczne.

Uczeń powinien:

12.1. interpretować 100% danej wielkości jako całość, 50% – jako połowę, 25% – jako jedną czwartą, 10% – jako jedną dziesiątą, 1% – jako jedną setną część danej wielkości liczbowej;

12.2. w przypadkach osadzonych w kontekście praktycznym obliczać procent danej wielkości w stopniu trudności typu 50%, 20%, 10%;

12.3. wykonywać proste obliczenia zegarowe na godzinach, minutach i sekundach;

12.4. wykonywać proste obliczenia kalendarzowe na dniach, tygodniach, miesiącach, latach;

12.5. odczytywać temperaturę (dodatnią i ujemną);

12.6. zamieniać i prawidłowo stosować jednostki długości: milimetr, centymetr, decymetr, metr, kilometr;

12.7. zamieniać i prawidłowo stosować jednostki masy: gram, dekagram, kilogram, tona;

12.8. obliczać rzeczywistą długość odcinka, gdy dana jest jego długość w skali oraz długość odcinka w skali, gdy dana jest jego rzeczywista długość;

12.9. w sytuacji praktycznej obliczać: drogę przy danej prędkości i czasie, prędkość przy danej drodze i czasie, czas przy danej drodze i prędkości oraz stosować jednostki prędkości km/h i m/s.

Przykładowe zadania

Z.12.a) Zosia i Staś wyszli do szkoły o 7^{30}. Dystans, jaki muszą pokonać z domu do szkoły wynosi 4 km. Zosia jechała rowerem i w szkole była o 7^{42}, a Staś ćwiczy bieganie i dobiegł do szkoły o 7^{50}. Z jaką prędkością poruszało się każde z nich?

Z.12.b) Ślimak przebył 1,2 m. Przemieszczał się z prędkością $2\,\mathrm{cm/min}$. Ile czasu zajęła mu ta droga, jeżeli pełzał bez przerw?

Z.12.c) Podaj rzeczywistą odległość dzielącą miejscowości Iksowo i Igrekowo, jeżeli na mapie w skali $1:350000$ są oddalone o 8 cm.

Z.12.d) Oblicz odległość na mapie w skali $1:200000$ między miejscowościami *A* i *B*, jeżeli w rzeczywistości leżą one w odległości $21\ \mathrm{km}$.

Z.12.e) Oblicz rzeczywiste wymiary i pole prostokątnego pokoju, który na planie w skali $1:200$ ma wymiary $2\,\mathrm{cm} \times 2{,}5\ \mathrm{cm}$.

Z.12.f) Oblicz, jaki dzień tygodnia przypadał 3 maja 1791 roku.

13. Elementy statystyki opisowej.

Uczeń powinien:

13.1. gromadzić i porządkować dane;

13.2. odczytywać i interpretować dane przedstawione w tekstach, tabelach, diagramach i na wykresach.

Przykładowe zadania

Z.13.a) We wszystkich trzech klasach szóstych w pewnej szkole przeprowadzono ankietę „Jaki smak lodów lubisz najbardziej?”. W ankiecie wzięli udział wszyscy uczniowie z tych klas. Wyniki jakie otrzymano były następujące: w klasie VIa – 12 osób wybrało lody czekoladowe, 7 osób – lody waniliowe, a 6 osób – truskawkowe. W klasie VIb – 5 osób wybrało lody waniliowe, 10 osób – truskawkowe, a 6 osób – czekoladowe. W ostatniej klasie VIc po 7 osób wybrało lody truskawkowe i czekoladowe, a 9 osób waniliowe. Wykonaj diagram słupkowy przedstawiający wyniki tej ankiety. Odczytaj, które lody cieszą się największą popularnością w klasach szóstych w tej szkole.

Z.13.b) Odczytaj z prognozy pogody (podanej w formie meteorogramu), w którym z najbliższych dni prognozowana temperatura będzie największa. Podaj w jakich godzinach, według prognozy, temperatura powietrza będzie rosła, a w jakich malała. W którym z najbliższych dni pogoda będzie najlepsza do organizacji pikniku? Odpowiedź uzasadnij.

14. Zadania tekstowe.

Uczeń powinien:

14.1. umieć przeczytać ze zrozumieniem tekst zawierający informacje liczbowe;

14.2. wykonywać wstępne czynności ułatwiające rozwiązanie zadania, w tym rysunek pomocniczy lub wygodne dla niego zapisanie informacji i danych z treści zadania;

14.3. dostrzegać zależności między podanymi informacjami;

14.4. dzielić rozwiązanie zadania na etapy, stosując własne, poprawne, wygodne dla niego strategie rozwiązania;

14.5. do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym umieć zastosować poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody;

14.6. weryfikować wynik zadania tekstowego, oceniając sensowność rozwiązania.

Przykładowe zadania

Z.14.a) Staszek ma 3 razy więcej pieniędzy niż Janek. Razem mają 48 zł. O ile więcej pieniędzy ma Staszek?

Z.14.b) Pani Ania kupiła 75 dag śliwek w cenie $8,60$ zł za kg i 3 paczki rzodkiewek po 2, 60 zł. Ile reszty otrzymała, jeśli zapłaciła banknotem 20 zł?

Z.14.c) Zosia kupiła pęczek szczypiorku, 2 cebule, które ważyły łącznie 25 dag, i 5 buraków na sałatkę. Szczypiorek kosztował 3,20 zł, 1 kg cebuli kosztował 1 zł 80 gr, a buraki były w cenie 3 zł za 1 kg. Zosia zapłaciła za swoje zakupy 6 zł 5 gr. Ile ważyły buraki?

II. Powtórzenie i rozszerzenie treści nauczania przed etapem formalnym.

15. Arytmetyka.

Uczeń powinien:

15.1. sprawnie wykonywać cztery działania arytmetyczne na liczbach całkowitych i liczbach zapisanych za pomocą ułamków zwykłych, liczb mieszanych i ułamków dziesiętnych (czyli wymiernych);

15.2. zamieniać ułamki zwykłe na dziesiętne i odwrotnie;

15.3. rozwijać ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne skończone lub nieskończone;

15.4. umieć podzielić z resztą liczbę *a* przez liczbę *b* oraz liczbę *a* zapisać w postaci: $a = b \cdot q + r$;

15.5. liczby w zakresie do 3000 zapisane w systemie rzymskim przedstawiać w systemie dziesiątkowym, a zapisane w systemie dziesiątkowym przedstawiać w systemie rzymskim;

15.6. obliczać liczbę, której część jest podana (wyznaczać całość, z której określono część za pomocą ułamka);

15.7. wyznaczać liczbę, która po powiększeniu lub pomniejszeniu o pewną część pozwala na uzyskanie danej wartości, także w rozwiązaniach zadań tekstowych.

Przykładowe zadania

Z.15.a) Oblicz: $(57-34)-(81-47)$.

Z.15.b) Oblicz: $\left[\left(2\frac{1}{5}-1\frac{3}{5}\right)\cdot 1\frac{1}{4}+1\frac{3}{4}\right]\cdot 4$.

Z.15.c) Oblicz: $\left(3\frac{1}{20}-1\frac{11}{16}\right)-\left(\frac{131}{144}-\frac{17}{30}\right)$.

Z.15.d) Oblicz: $\left[\left(5\frac{7}{12}-3\frac{17}{36}\right)\cdot 2\frac{1}{2}-4\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{26}\right]\cdot\frac{1}{2}$.

Z.15.e) Oblicz: $5,25:0,05-7\frac{1}{2}\cdot\left(2,5+3\frac{2}{3}\right)+1,25$.

Z.15.f) Zamień ułamek $\frac{9}{14}$ na ułamek dziesiętny.

Z.15.g) Podziel z resztą $138:7$

Z.15.h) Basia wydała na zakupy 24 zł. Jest to $\frac{3}{4}$ kwoty jaką zaoszczędziła. Oblicz kwotę oszczędności Basi.

Z.15.i) Cenę spodni obniżono o $\frac{1}{3}$ ceny początkowej. Teraz kosztują one 120 zł. Ile kosztowały spodnie przed obniżką?

Z.15.j) Wojtek dał Krzyśkowi $\frac{2}{3}$ swoich cukierków. Ile cukierków miał Wojtek, jeżeli Krzyś dostał od niego 6 cukierków?

Z.15.k) Cenę telewizora zwiększono o $0,25$ ceny początkowej i teraz kosztuje on 2500 zł. Oblicz cenę tego telewizora przed podwyżką.

Z.15.l) Po sezonie cena kurtki została obniżona o $\frac{1}{5}$ swojej początkowej ceny i teraz kurtka kosztuje 480 zł. Ile kosztowała ta kurtka przed obniżką?

Z.15.m) Po podwyżce o $\frac{1}{10}$ początkowej ceny obecna cena nart jest równa 660 zł. Ile kosztowały narty przed podwyżką?

Z.15.n) Ania jechała pociągiem z Warszawy do Krakowa. Przez $\frac{1}{3}$ czasu spała, przez $\frac{1}{2}$ czasu, kiedy nie spała, czytała książkę, a przez pozostałą godzinę rozmawiała przez telefon. Ile czasu trwała podróż?

16. Liczby naturalne.

Uczeń powinien:

16.1. rozpoznawać wielokrotności danej liczby, kwadraty, sześciany, liczby pierwsze, liczby złożone;

16.2. odpowiadać na pytania dotyczące liczebności różnych rodzajów liczb wśród liczb z pewnego niewielkiego zakresu (np. od 1 do 200 czy od 100 do 1000), o ile odpowiedź jest na tyle mała, że wszystkie rozważane liczby uczeń może wypisać;

16.3. rozkładać liczby naturalne na czynniki pierwsze, w przypadku gdy co najwyżej jeden z tych czynników jest liczbą większą niż 10;

16.4. znajdować największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność dwóch liczb naturalnych metodą rozkładu na czynniki.

Przykładowe zadania

Z.16.a) Ile jest liczb podzielnych przez 7 wśród liczb całkowitych od 1 do 100?

Z.16.b) Ile jest kwadratów liczb całkowitych wśród liczb od 100 do 499?

Z.16.c) Ile jest sześcianów liczb całkowitych wśród liczb od 100 do 1000?

Z.16.d) Ile jest liczb pierwszych wśród liczb od 10 do 50?

Z.16.e) Ile jest liczb złożonych wśród liczb od 20 do 40?

Z.16.f) Rozłóż na czynniki pierwsze liczby 432, 910, 2016, 5040.

Z.16.g) Oblicz największy wspólny dzielnik par liczb: $\mathrm{NWD}(600,72)$, $\mathrm{NWD}(140,567)$, $\mathrm{NWD}(10000,48)$ i $\mathrm{NWD}(910,2016)$.

17. Geometria.

Uczeń powinien:

17.1. zamieniać jednostki odległości, pola i objętości;

17.2. obliczać obwody wielokątów;

17.3. obliczać pola podstawowych wielokątów: trójkąta, kwadratu, prostokąta, równoległoboku, rombu, trapezu, w tym także dla nietypowych danych wymagających zamiany jednostek;

17.4. obliczać pola wielokątów metodą podziału na mniejsze wielokąty lub uzupełniania do większych wielokątów;

17.5. obliczać objętości podstawowych wielościanów: sześcianu i prostopadłościanu.

Przykładowe zadanie

Z.17.a) Ile szklanek o pojemności 0,25 l ma taką samą łączną pojemność, jak naczynie o pojemności $0{,}5\,m^3$?

Z.17.b) Oblicz obwód pięciokąta, w którym 4 boki mają taką samą długość 10 cm, a piąty bok jest 3 razy dłuższy od każdego z pozostałych boków.

Z.17.c) Oblicz pole prostokąta o obwodzie 30 cm, którego jeden bok ma długość 10 cm.

Z.17.d) Oblicz pole takiego prostokąta o obwodzie 40 cm, w którym dwa kolejne boki różnią się o 10 cm.

Z.17.e) Oblicz pole trójkąta prostokątnego o bokach 5 dm, 12 dm i 13 dm.

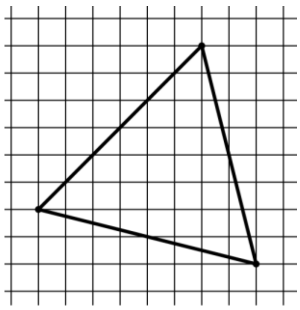
Z.17.f) Oblicz pole trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 100 cm i 30 cm.

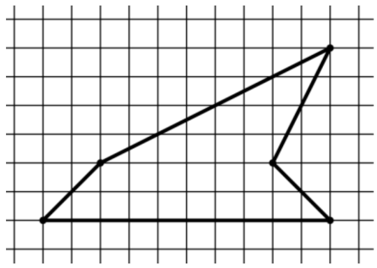
Z.17.g) Oblicz pole trójkąta, którego podstawa ma długość 1 km, a wysokość 0,01 mm. Odpowiedź podaj w centymetrach kwadratowych.

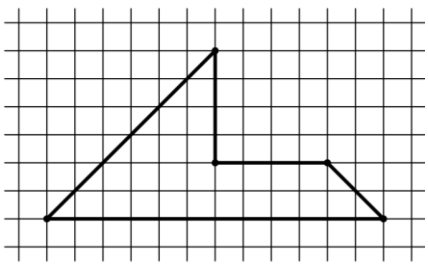
Z.17.h) Pole prostokąta jest równe 2 ha. Jeden z boków tego prostokąta ma 100 m. Oblicz długość drugiego boku prostokąta.

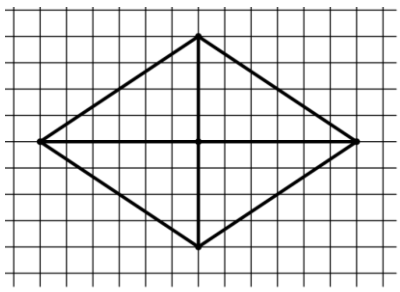
Z.17.i) Oblicz pole trapezu o podstawach długości 1 m i 4 cm oraz wysokości 0,1 mm. Odpowiedź podaj w milimetrach kwadratowych.

Z.17.j) Oblicz pola narysowanych figur, przy założeniu, że bok kratki jest równy 1 cm:

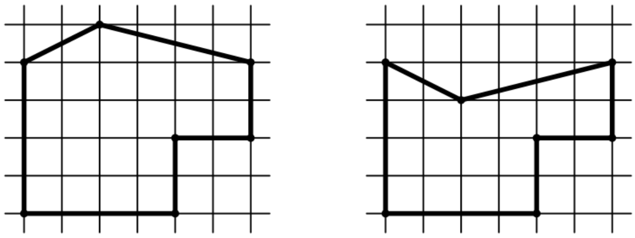




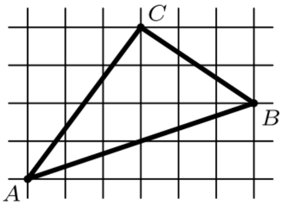




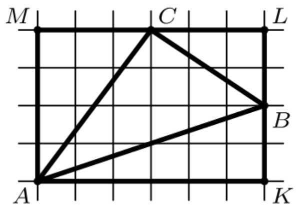
Z.17.k) Oblicz pole siedmiokątów przedstawionych na poniższych rysunkach (przyjmij, że bok jednej kratki ma długość 1 cm).



Z.17.l) Oblicz pole trójkąta *ABC* (przyjmij, że bok jednej kratki ma długość 1 cm).



Rozwiązanie zadania może polegać na uzupełnieniu trójkąta *ABC* do prostokąta *AKLM* i odjęciu od pola tego prostokąta pól trzech trójkątów.



Z.17.m) Oblicz objętość prostopadłościanu, w którym 8 krawędzi ma długość po 5 cm każda, a 4 krawędzie mają długość po 40 mm każda.

III Etap formalny

18. Przybliżanie i zaokrąglanie.

Uczeń powinien:

18.1. zaokrąglać daną liczbę zapisaną w systemie dziesiętnym z zadaną dokładnością.

Przykładowe zadania

Z.18.a) Zaokrąglij liczbę 8,9579555 tak, by po zaokrągleniu miała 4 miejsca po przecinku.

Z.18.b) Zaokrąglij liczbę 29814,14 do dziesiątek.

Z.18.c) Podaj przybliżenie liczbą całkowitą ułamka $\frac{113}{4}$, takie że obie liczby (ułamek i jego przybliżenie) różnią się o mniej niż 0,5.

19. Potęgi.

Uczeń powinien:

19.1. umieć zapisać iloczyn jednakowych czynników w postaci potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim;

19.2. umieć mnożyć i dzielić potęgi o wykładnikach całkowitych dodatnich;

19.3. umieć mnożyć potęgi o różnych podstawach i jednakowych wykładnikach;

19.4. umieć podnosić potęgę do potęgi;

19.5. odczytywać i zapisywać liczby w notacji wykładniczej (z wykładnikami całkowitymi).

Przykładowe zadania

Z.19.a) Zapisz iloczyn $2^{11} \cdot 2^{35}$ w postaci potęgi liczby 2.

Z.19.b) Znajdź liczbę całkowitą dodatnią *n* taką, że $5^3 \cdot 5^n = 5^{11}$

Z.19.c) Zapisz potęgę $\left(2^{11}\right)^8$ w postaci potęgi liczby 2.

Z.19.d) Znajdź liczbę całkowitą dodatnią *n* taką, że $\left(5^3\right)^n = 5^{15}$.

Z.19.e) Znajdź liczbę całkowitą dodatnią *n* taką, że $\left(5^n\right)^5 = 5^{35}$.

Z.19.f) Zapisz liczbę 15^7 w postaci iloczynu potęg dwóch liczb pierwszych.

Z.19.g) Zapisz liczbę $6^3 \cdot 10^4 \cdot 15^2$ w postaci iloczynu potęg trzech liczb pierwszych.

Z.19.h) Zapisz w notacji wykładniczej liczby: 0,001434, 79000000, 0,000001.

20. Pierwiastki kwadratowe.

Uczeń powinien:

20.1. znajdować za pomocą kalkulatora przybliżenia pierwiastków kwadratowych;

20.2. szacować wielkość danego pierwiastka kwadratowego lub wyrażenia arytmetycznego zawierającego pierwiastki, porównywać wartość wyrażenia arytmetycznego zawierającego pierwiastki z daną liczbą wymierną oraz znajdować liczby wymierne większe lub mniejsze od takiego wyrażenia arytmetycznego;

20.3. obliczać pierwiastek z iloczynu dwóch liczb, wyłączać liczbę przed znak pierwiastka i włączać liczbę pod znak pierwiastka.

Przykładowe zadania

Z.20.a) Oblicz: $\left(-\sqrt{2}\right)^2$, $\left(\sqrt{2}\right)^2$, $\sqrt{7^2}$, $\sqrt{(-7)^2}$.

Z.20.b) Znajdź liczbę całkowitą a taką, że: $a \le \sqrt{137} < a+1$.

Z.20.c) Znajdź liczby całkowite dodatnie a i b takie, że: $1+\sqrt{2} < \frac{a}{b} < \sqrt{7}$. (Odp. Np. $\frac{5}{2}$)

Z.20.d) Oblicz $\sqrt{12^2 \cdot 7^2}$.

Z.20.e) Zapisz liczbę $\sqrt{48}$ w postaci $a\sqrt{b}$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi, przy czym liczba a jest największą z możliwych.

Z.20.f) Wiadomo, że odległość, z jakiej obserwator znajdujący się h metrów nad ziemią może dostrzec obiekt oddalony od ziemi o H metrów, wynosi $3{,}8\left(\sqrt{h}+\sqrt{H}\right)$[i] kilometrów (przy założeniu odpowiedniej przejrzystości powietrza i braku zasłaniających obiektów, oraz przy założeniu odpowiedniej ostrości wzroku). Z jakiej, w przybliżeniu, odległości pasażer statku znajdujący się na wysokości 10 m nad poziomem morza może dostrzec w nocy światło latarni morskiej Rozewie położone na wysokości 83 m n.p.m. (przy założeniu doskonałej widoczności powietrza)?

21. Wyrażenia algebraiczne. Jednomiany, sumy algebraiczne. Tworzenie wyrażeń algebraicznych z jedną zmienną i z wieloma zmiennymi.

Uczeń powinien:

21.1. zapisywać wyniki podanych działań w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych;

21.2. obliczać wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych;

21.3. zapisywać zależności przedstawione w zadaniach w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych;

21.4. zapisywać rozwiązania zadań w postaci wyrażeń algebraicznych.

Przykładowe zadania

Z.21.a) Zapisz liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez liczbę 7 daje iloraz n i resztę 5?

Z.21.b) Zapisz liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez liczbę $3n$ daje iloraz 2 i resztę n?

Z.21.c) Zapisz sumę siedmiu kolejnych liczb naturalnych, z których najmniejszą jest liczba n?

Z.21.d) Udowodnij, że suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 5.

Z.21.e) Bartek i Grześ zbierali kasztany. Bartek zebrał n kasztanów, Grześ zebrał 7 razy więcej. Następnie Grześ w drodze do domu zgubił 10 kasztanów, a połowę pozostałych oddał Bartkowi. Ile kasztanów ma teraz Bartek, a ile ma Grześ? (Odp.: Bartek ma $n + (7n–10) : 2$, Grześ ma $(7n–10) : 2$)

Z.21.f) Janek kupił w cukierni 3 ciastka i 5 bułeczek za 11 złotych. Ciastko kosztowało x złotych. Wyznacz cenę bułeczki.

Z.21.g) Janek kupił w cukierni 3 ciastka i 5 bułeczek za 11 złotych. Bułeczka kosztowała x złotych. Wyznacz cenę ciastka.

Z.21.h) Janek kupił 5 zeszytów i 7 ołówków za 41 złotych. Zeszyt jest o złotówkę droższy od ołówka. Ile kosztuje zeszyt?

Przykładowe rozwiązanie bez użycia równania może wyglądać następująco: gdyby Janek kupił 12 ołówków i ani jednego zeszytu, zapłaciłby o 5 złotych mniej, czyli 36 złotych, zatem ołówek kosztuje 3 złote, a zeszyt 4 złote.

Z.21.i) Janek kupił n zeszytów i 7 ołówków za 41 złotych. Zeszyt jest o złotówkę droższy od ołówka. Ile kosztuje zeszyt?

Przykładowe rozwiązanie może wyglądać następująco: gdyby Janek kupił $n+7$ ołówków i ani jednego zeszytu, zapłaciłby o n złotych mniej, czyli $41-n$ złotych. Zatem ołówek kosztuje $\frac{41-n}{n+7}$ złotych, a zeszyt $\frac{41-n}{n+7}+1$ złotych.

22. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych. Sumy algebraiczne i działania na nich.

Uczeń powinien:

22.1. porządkować jednomiany i dodawać jednomiany podobne (tzn. różniące się jedynie współczynnikiem liczbowym);

22.2. dodawać i odejmować sumy algebraiczne, dokonując przy tym redukcji wyrazów podobnych;

22.3. mnożyć sumy algebraiczne przez jednomian i dodawać wyrażenia powstałe z mnożenia sum algebraicznych przez jednomiany;

22.4. mnożyć sumy algebraiczne, dokonując redukcji wyrazów podobnych.

Przykładowe zadania

Z.22.a) Oblicz $3a^2b-2abb+5bba-7bab-3b^2a$.

Z.22.b) Oblicz $2a\left(3ab+2a^2-5ab-6b^2\right)-5b\left(3b^2-2ab+2a^2-6ba\right)$.

Z.22.c) Oblicz $\left(a+b-c\right)\cdot\left(2a-b+3c\right)$.

Z.22.d) Oblicz $\left(3x^2-2x+1\right)\left(2x^2-x+3\right)$.

Z.22.e) Wykaż, że jeśli liczba n daje resztę 3 przy dzieleniu przez 5, to liczba n^2+1 jest podzielna przez 5.

Z.22.f) Wykaż, że jeśli liczba n nie jest podzielna przez 3, to liczba n^2 daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3.

23. Obliczenia procentowe.

Uczeń powinien:

23.1. przedstawiać część wielkości jako procent tej wielkości;

23.2. rozwiązywać następujące trzy podstawowe typy zadań na procenty:

23.2.1. obliczać liczbę *a* równą *p* procent danej liczby *b*: $a=\frac{p}{100}\cdot b$;

23.2.2. obliczać, jaki procent danej liczby *b* stanowi liczba *a*: $p=\frac{100a}{b}$;

23.2.3. obliczać liczbę *b*, której *p* procent jest równe *a*: $b=\frac{100a}{p}$;

23.3. wykonywać obliczenia dotyczące jednokrotnej podwyżki lub obniżki wielkości o dany procent, a także wielokrotnych podwyżek i obniżek wielkości o dany procent.

Przykładowe zadania

Z.23.a) Rower kosztował 1200 złotych, a następnie zdrożał o 15 procent. Ile ten rower kosztuje teraz?

Z.23.b) Rower kosztował 1200 złotych, a następnie staniał o 20 procent. Ile ten rower kosztuje teraz?

Z.23.c) Rower kosztował 1200 złotych, następnie zdrożał o 20 procent, a potem staniał o 10 procent. Ile ten rower kosztuje teraz?

Z.23.d) Dwa rowery kosztowały tyle samo złotych. Jeden najpierw zdrożał o 10 procent, a następnie staniał o 20 procent. Drugi najpierw staniał o 20 procent, a następnie zdrożał o 10 procent. Który rower jest droższy teraz?

24. Równania z jedną niewiadomą.

Uczeń powinien:

24.1. umieć sprawdzić, czy dana liczba jest rozwiązaniem równania (dowolnego stopnia) z jedną niewiadomą.

24.2. rozwiązywać równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą metodą równań równoważnych;

24.3. rozwiązywać równania, które po przekształceniach wyrażeń algebraicznych sprowadzają się do równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą;

24.4. rozwiązywać zadania tekstowe za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym także z obliczeniami procentowymi.

Przykładowe zadania

Z.24.a) Sprawdź, które liczby całkowite dodatnie mniejsze od 10 są rozwiązaniami równania $x^2 - 9x = -14$.

Z.24.b) Sprawdź, które liczby całkowite niedodatnie i większe od -8 są rozwiązaniami równania $\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{2} = 0$.

Z.24.c) Rozwiąż równanie $25 - 7x + 31 + 4x = 3x + 57 - 2x - 5$.

Z.24.d) Rozwiąż równanie $\frac{4+x}{3} - \frac{12-2x}{2} = -2$.

Z.24.e) Rozwiąż równanie $x^2 - (x+1)(x-2) = -15$.

Z.24.f) Grześ i jego młodszy brat Bartek zbierali kasztany. Grześ zebrał 7 razy więcej kasztanów niż jego brat. Wtedy Grześ dał bratu 6 kasztanów i teraz ma 5 razy więcej niż Bartek. Ile kasztanów zebrał każdy z braci?

Z.24.g) Dwukrotnie byłem w cukierni. Za pierwszym razem za 4 bułeczki i 5 ciastek zapłaciłem 13,30 zł. Za drugim razem za 7 bułeczek i 3 ciastka zapłaciłem 13,50 zł. Ile kosztuje bułeczka i ile ciastko?

Z.24.h) Ile kilogramów solanki (roztwór soli kuchennej w wodzie) trzydziestoprocentowej i ile dziesięcioprocentowej należy zmieszać, by otrzymać 10 kg solanki 24-procentowej?

25. Proporcjonalność.

Uczeń powinien:

25.1. podawać wzięte z życia przykłady wielkości wprost proporcjonalnych;

25.2. umieć stosować podział proporcjonalny.

Przykładowe zadania

Z.25.a) Za 3 kg cukierków czekoladowych mama Ani zapłaciła 58,50 zł. Ile trzeba zapłacić za 5 kg tych cukierków?

Z.25.b) Podziel 80 cukierków między troje dzieci: Anię, Bartka i Cecylię proporcjonalnie do ich wieku. Ania ma 5 lat, Bartek 7 lat, a Cecylia 8 lat. Ile cukierków otrzyma każde dziecko?

26. Oś liczbowa.

Uczeń powinien:

26.1. zaznaczać na osi liczbowej liczby dodatnie i ujemne, zapisane w postaci ułamków, liczb mieszanych i ułamków dziesiętnych;

26.2. umieć zaznaczyć na osi liczbowej zbiory liczb spełniających warunek typu $x \geq 1,5$ lub $x < -\frac{4}{7}$.

Przykładowe zadania

Z.26.a) Zaznacz na osi liczbowej liczby: $\frac{3}{5}$, $2\frac{1}{3}$ oraz $3,4$.

Z.26.b) Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek $x \geq 3$.

Z.26.c) Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek $x < -3\frac{2}{5}$.

27. Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie. Dowodzenie twierdzeń geometrycznych.

Uczeń powinien:

27.1. umieć udowodnić twierdzenie o równości kątów wierzchołkowych (z wykorzystaniem zależności między kątami przyległymi);

27.2. przedstawiać na płaszczyźnie dwie proste w różnych położeniach względem siebie, w szczególności proste prostopadłe i proste równoległe;

27.3. korzystać z własności prostych równoległych, w szczególności stosować równość kątów odpowiadających i naprzemianległych;

27.4. umieć udowodnić twierdzenie o sumie kątów trójkąta;

27.5. korzystać z zależności między kątem zewnętrznym a kątem wewnętrznym trójkąta;

27.6. wykorzystywać cechy przystawania trójkątów, w szczególności do uzasadniania własności trójkątów;

27.7. umieć udowodnić twierdzenia o trójkątach równoramiennych;

27.8. korzystać z nierówności trójkąta (tzn. twierdzenia o tym że dla dowolnych punktów *A*, *B* i *C* na płaszczyźnie ma miejsce nierówność $AB + BC \geq AC$);

27.9. wskazywać na płaszczyźnie punkty *A*, *B*, *C*, dla których zachodzi równość $AB + BC = AC$;

27.10. stosować poniższe własności figur geometrycznych:

27.10.1. długość łamanej jest większa od długości odcinka łączącego końce tej łamanej;

27.10.2. Jeśli w trójkącie *ABC* ma miejsce nierówność $AC > BC$, to $\sphericalangle BAC < \sphericalangle ABC$ (naprzeciw dłuższego boku leży większy kąt);

27.10.3. Jeśli w trójkącie *ABC* ma miejsce nierówność $\sphericalangle BAC < \sphericalangle ABC$, to $AC > BC$ (naprzeciw większego kąta leży dłuższy bok);

27.11. wskazywać najdłuższy i najkrótszy bok trójkąta o danych kątach;

27.12. wskazywać największy i najmniejszy kąt trójkąta o danych bokach;

27.13. wykonywać proste obliczenia geometryczne wykorzystujące sumę kątów w trójkącie i własności trójkątów równoramiennych;

27.14. przeprowadzać proste dowody geometryczne wykorzystujące własności prostych równoległych, twierdzenie o sumie kątów trójkąta, własności trójkątów równoramiennych, nierówności geometryczne (nierówność trójkąta i nierówności między bokami i kątami trójkąta) oraz przystawanie trójkątów.

Przykładowe zadania

Z 27.a) Jeśli w trójkącie ABC zachodzi równość $AC = BC$, to $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$.

Z.27.b) Jeśli w trójkącie ABC zachodzi równość $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$, to $AC = BC$.

Z.27.c) W trójkącie ABC dane są kąty: $\sphericalangle BAC = 72°$ oraz $\sphericalangle ABC = 57°$. Wskaż najdłuższy i najkrótszy bok tego trójkąta.

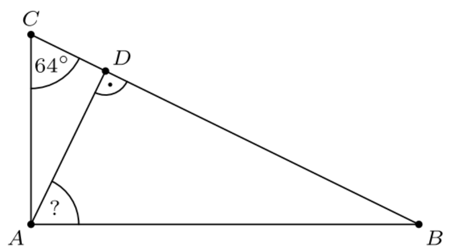
Z.27.d) W trójkącie ABC dane są boki: AB = 7 cm, BC = 11 cm oraz AC = 8 cm. Wskaż największy i najmniejszy kąt tego trójkąta.

Z.27.e) W trójkącie ABC poprowadzono odcinek CD łączący wierzchołek C ze środkiem boku AB. Ponadto AB = 12 cm oraz CD = 5 cm. Który kąt jest większy: $\sphericalangle DAC$ czy $\sphericalangle ACD$?

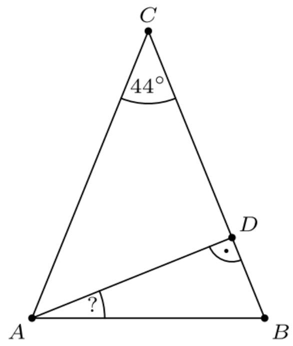
Z 27.f) W trójkącie ABC poprowadzono odcinek CD łączący wierzchołek C ze środkiem boku AB. Ponadto $\sphericalangle BAC = 58°$ oraz $\sphericalangle BDC = 120°$. Który z boków trójkąta ADC jest największy, a który najmniejszy?

Z.27.g) Wewnątrz boku AB trójkąta ABC znajduje się taki punkt D, że trójkąt DBC jest równoboczny. Udowodnij, że bok AC trójkąta ABC jest dłuższy od boku BC.

Z.27.h) Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 90°$ i $\sphericalangle ACB = 64°$. W tym trójkącie poprowadzono wysokość AD. Oblicz kąt BAD.



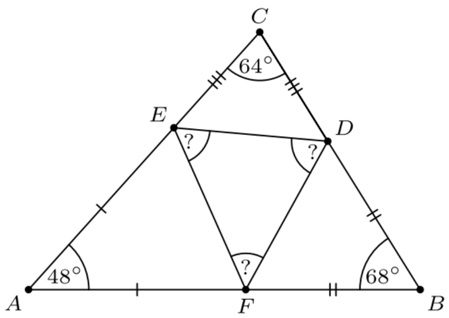
Z.27.i) Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$ i $\sphericalangle ACB = 44°$. W tym trójkącie poprowadzono wysokość AD. Oblicz kąt BAD.



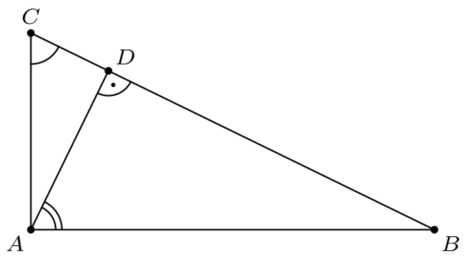
Z.27.j) Dany jest trójkąt *ABC*, w którym

$$\sphericalangle BAC = 48^\circ,\ \sphericalangle ABC = 68^\circ \text{ oraz } \sphericalangle ACB = 64^\circ.$$

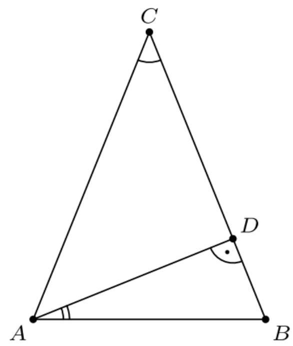
Na bokach *BC, AC* i *AB* tego trójkąta wybrano odpowiednio punkty *D, E* i *F* w taki sposób, by $AE = AF$, $BD = BF$ oraz $CD = CE$. Oblicz kąty trójkąta *DEF*.



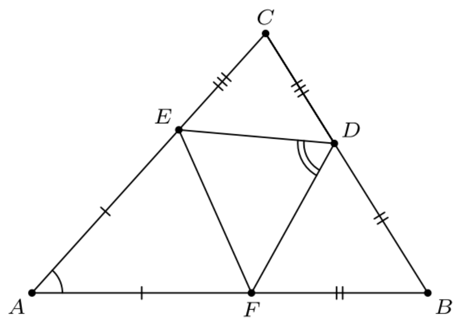
Z.27.k) Dany jest trójkąt prostokątny *ABC*, w którym $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. W tym trójkącie poprowadzono wysokość *AD*. Udowodnij, że $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ACB$.



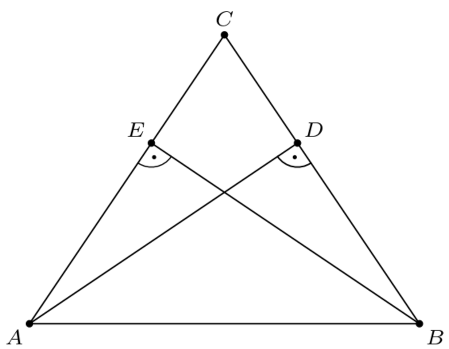
Z.27.l) Dany jest ostrokątny trójkąt równoramienny *ABC*, w którym $AC = BC$. W tym trójkącie poprowadzono wysokość *AD*. Udowodnij, że $\sphericalangle ACB = 2 \cdot \sphericalangle BAD$.



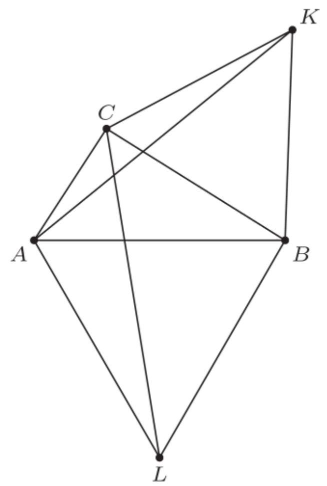
Z.27.m) Na bokach *BC*, *AC* i *AB* trójkąta *ABC* wybrano odpowiednio punkty *D*, *E* i *F* w taki sposób, by $AE = AF$, $BD = BF$ oraz $CD = CE$. Udowodnij, że $2 \cdot \sphericalangle EDF + \sphericalangle BAC = 180°$.



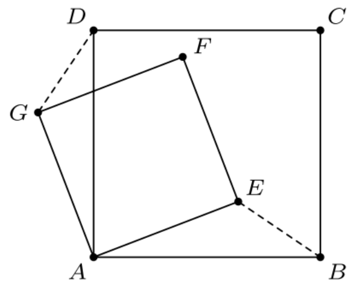
Z.27.n) Dany jest ostrokątny trójkąt równoramienny *ABC*, w którym $AC = BC$. W tym trójkącie poprowadzono wysokości *AD* i *BE*. Udowodnij, że $AD = BE$.



Z.27.o) Na bokach *AB* i *BC* trójkąta ostrokątnego *ABC* zbudowano (na zewnątrz tego trójkąta) trójkąty równoboczne *ABL* i *BCK*. Udowodnij, że $AK = CL$.



Z.27.p) Dane są dwa kwadraty *ABCD* i *AEFG* położone tak jak na rysunku poniżej:



Udowodnij, że $BE = DG$.

Z.27.r) Dany jest równoległobok *ABCD* (tzn. czworokąt *ABCD* taki, że boki *AB* i *CD* są równoległe oraz równoległe są boki *AD* i *BC*). Udowodnij, że: $AB = CD$, $AD = BC$, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$.

Z.27.s) Udowodnij, że przekątne równoległoboku połowią się.

28. Wielokąty.

Uczeń powinien:

28.1. znać pojęcie wielokąta foremnego;

28.2. stosować wzory na pola znanych wielokątów, także do wyznaczania długości odcinków;

28.3. umieć udowodnić zależności dotyczące pól wielokątów.

Przykładowe zadania

Z.28.a) Oblicz najkrótszą wysokość trójkąta prostokątnego o bokach długości 5 cm, 12 cm i 13 cm.

Z.28.b) W równoległoboku wysokość opuszczona do krótszego boku jest równa 9 cm, a boki tego równoległoboku mają długości 8 cm i 12 cm. Oblicz krótszą wysokość tego równoległoboku.

Z.28.c) Pole trójkąta rozwartokątnego *ABK* jest równe 10 cm^2. Kąt *ABK* jest rozwarty. Utworzono równoległobok *ABCD* w taki sposób, że punkt *K* jest środkiem boku *BC* powstałego równoległoboku. Oblicz pole równoległoboku *ABCD*.

Z.28.d) Przekątne rombu *ABCD* mają długości 8 dm i 10 dm. Przekątną *BD* rombu przedłużono do punktu *E* w taki sposób, że odcinek *BE* jest dwa razy dłuższy od tej przekątnej. Oblicz pole trójkąta *CDE*. (Zadanie ma dwie odpowiedzi)

Z.28.e) Pole rombu jest równe 20 cm^2, a obwód rombu jest równy 20 cm. Oblicz wysokość rombu.

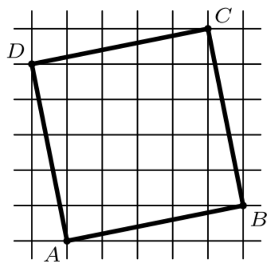
Z.28.f) Oblicz pole czworokąta *ABCD*, w którym kolejne boki mają długości:

$$AB = 20\,\text{cm}\,,\ BC = 7\,\text{cm}\,,\ CD = 24\,\text{cm}\,,\ DA = 15\,\text{cm}$$

oraz w którym kąty *BAD* i *BCD* są proste.

Z.28.g) Przekątne *AC* i *BD* trapezu *ABCD* o podstawach *AB* i *CD* przecinają się w punkcie *P*. Udowodnij, że pola trójkątów *APD* i *BCP* są równe.

Z.28.h) Udowodnij, że czworokąt *ABCD* na poniższym rysunku jest kwadratem i oblicz jego pole (przyjmij, że bok kratki ma długość 1 cm).



29. Długość okręgu i pole koła.

Uczeń powinien:

29.1. obliczać długość okręgu o danym promieniu lub danej średnicy;

29.2. obliczać promień lub średnicę okręgu o danej długości;

29.3. obliczać pole koła o danym promieniu lub danej średnicy;

29.4. obliczać promień lub średnicę koła o danym polu;

29.5. obliczać pole pierścienia kołowego o danych promieniach lub średnicach obu okręgów tworzących pierścień;

29.6. obliczyć pole połowy i ćwiartki koła o zadanym promieniu.

Przykładowe zadania

Z.29.a) Oblicz długość okręgu o promieniu π cm.

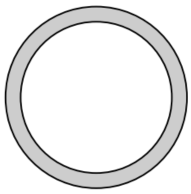
Z.29.b) Oblicz długość okręgu o średnicy 42 cm.

Z.29.c) Oblicz długość średnicy okręgu o polu $196\pi\ \text{cm}^2$.

Z.29.d) Oblicz promień okręgu o długości $18\pi\ \text{dm}$.

Z.29.e) Oblicz pole obszaru ograniczonego okręgami o wspólnym środku i średnicach 18 cm i 28 cm.

Z.29.f) Pole obszaru zaznaczonego na rysunku szarym kolorem (pierścienia kołowego) jest równe $27\pi\ \text{cm}^2$. Promienie obu okręgów wyznaczających ten obszar (pierścień kołowy), wyrażone w centymetrach, są kolejnymi liczbami całkowitymi. Oblicz promień mniejszego z okręgów wyznaczających ten obszar.



30. Twierdzenie Pitagorasa.

Uczeń powinien:

30.1. obliczać długość trzeciego boku trójkąta prostokątnego, gdy znane są długości pozostałych boków, także wtedy, gdy ten trójkąt nie jest wyraźnie wskazany i w zastosowaniach praktycznych;

30.2. obliczać długości odcinków narysowanych na papierze w kratkę, jeśli końce tych odcinków są umieszczone w punktach przecięcia linii tworzących kratki;

30.3. wyprowadzić, wzory na długość przekątnej kwadratu, wysokości trójkąta równobocznego i na pole trójkąta równobocznego, a także umieć korzystać z tych wzorów w innych obliczeniach geometrycznych (także w kontekście praktycznym);

30.4. wykorzystywać twierdzenie Pitagorasa w zadaniach prowadzących do równań z jedną niewiadomą.

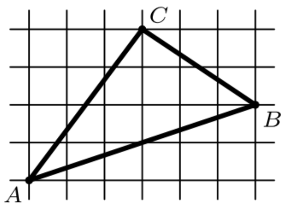
Przykładowe zadania

Z.30.a) Oblicz pole trójkąta równoramiennego *ABC*, którego boki mają następujące długości: $AB = 10$ cm oraz $AC = BC = 13$ cm.

Z.30.b) Oblicz długość przekątnej *AC* prostokąta *ABCD*, którego boki są równe: $AB = 5$ cm i $BC = 12$ cm.

Z.30.c) Prostokątny plac *ABCD* ma wymiary: $AB = 560$ m i $BC = 330$ m. Ten plac jest otoczony asfaltową ścieżką rowerową. Grześ jedzie rowerem po tej ścieżce wzdłuż dwóch boków *AB* i *BC* placu z prędkością 5 m/s, jego brat Bartek jedzie po przekątnej *AC* (po gorszej nawierzchni) z prędkością $3,25$ m/s. Kto dojedzie szybciej do punktu *C* i o ile sekund wyprzedzi swojego brata? Do czasu jazdy Grzesia dodaj 1 sekundę, którą straci na pokonanie zakrętu w punkcie *B*.

Z.30.d) Oblicz długości boków trójkąta *ABC* (przyjmij, że bok jednej kratki ma długość 1 cm).



Z.30.e) Kwadrat *KLMN* o boku równym 8 cm jest umieszczony w trójkącie równobocznym *ABC* tak, że wierzchołki *K* i *L* leżą wewnątrz boku *AB*, wierzchołek *M* leży wewnątrz boku *BC* i wierzchołek *N* leży wewnątrz boku *AC*. Oblicz długość boku trójkąta *ABC*.

Z.30.f) Oblicz pole trójkąta równoramiennego *ABC*, w którym $AC = BC = 8$ cm oraz $\sphericalangle ACB = 45°$. (Odp. $\frac{32}{\sqrt{2}}$ cm^2 lub inaczej $16\sqrt{2}$ cm^2).

Z.30.g) Dany jest trapez prostokątny *ABCD* o podstawach *AB* i *CD*, w którym ramię *AD* jest prostopadłe do podstaw. Ponadto $AB = 7$ cm $CD = 5$ cm oraz $AD = 8$ cm. Na ramieniu *AD* wybrano punkt *E* tak, by $BE = CE$. Oblicz długość odcinka *AE*.

31. Układ współrzędnych na płaszczyźnie.

Uczeń powinien:

31.1. znajdować współrzędne danych (na rysunku) punktów kratowych w układzie współrzędnych na płaszczyźnie;

31.2. rysować w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty kratowe o danych współrzędnych całkowitych (dowolnego znaku);

31.3. znajdować środek odcinka, którego końce mają dane współrzędne (całkowite lub wymierne) oraz znajdować współrzędne drugiego końca odcinka, gdy dany jest jeden koniec i środek;

31.4. znajdować długość odcinka, którego końce są danymi punktami kratowymi na płaszczyźnie;

31.5. znajdować następne punkty kratowe na prostej *AB*, dla danych punktów kratowych *A* i *B*.

Przykładowe zadania

Z.31.a) Oblicz współrzędne środka odcinka *AB*, gdzie $A=(3,5)$ oraz $B=(-11,9)$.

Z.31.b) Oblicz współrzędne punktu *B*, gdzie $A=(5,11)$ oraz środek *S* odcinka *AB* ma współrzędne $S=(9,-3)$.

Z.31.c) Oblicz długość odcinka *AB*, gdzie $A=(5,11)$ oraz $B=(3,-8)$.

Z.31.d) Podaj współrzędne jakichkolwiek trzech punktów (różnych od *A* i *B* oraz mających współrzędne całkowite) leżących na prostej *AB*, gdzie $A=(3,7)$ oraz $B=(6,8)$.

32. Geometria przestrzenna.

Uczeń powinien:

32.1. obliczać objętości i pola powierzchni graniastosłupów prostych, prawidłowych i takich, które nie są prawidłowe;

32.2. obliczać objętości i pola powierzchni ostrosłupów prawidłowych i takich, które nie są prawidłowe.

Przykładowe zadania

Z.32.a) Pole podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 25 cm^2. Wysokość tego graniastosłupa jest 3 razy dłuższa od krawędzi podstawy. Oblicz pole powierzchni tego graniastosłupa.

Z.32.b) Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $12\sqrt{3}\ \mathrm{dm}^3$, a wysokość tego graniastosłupa jest równa 8 dm. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

Z.32.c) Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny, którego dwa równe kąty mają po $45°$, a najdłuższy bok ma długość $6\sqrt{2}$ dm. Jeden z boków prostokąta, który jest w tym graniastosłupie ścianą boczną o największej powierzchni, ma długość 4 dm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Z.32.d) W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym każda ściana boczna jest kwadratem o polu 81 cm^2. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Z.32.e) Wiadro ma pojemność 12 l. Ile takich wiader wody trzeba wlać do naczynia o wymiarach 10 dm × 12 dm × 3 dm, by napełnić je do $\frac{3}{4}$ wysokości?

Z.32.f) Basen ma wymiary 50 m × 20 m, a jego dno ma kształt prostokąta, którego krótszy bok ma długość 20 m. Głębokość basenu zmienia się równomiernie od 2 m do 4 m. Ile metrów sześciennych wody mieści się w basenie całkowicie wypełnionym?

Z.32.g) Dany jest graniastosłup prosty, którego podstawami są trójkąty prostokątne *ABC* i *DEF* takie, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDF = 90°$, a krawędziami bocznymi odcinki *AD*, *BE* i *CF*. Ponadto: $AB = 24$ cm, $BC = 25$ cm oraz $AD = 10$ cm. Oblicz objętość i pole powierzchni tego graniastosłupa.

Z.32.h) Oblicz objętość ostrosłupa o podstawie kwadratowej, w którym wysokość jest dwa razy większa od długości krawędzi podstawy, a pole podstawy jest równe 625 cm^2 .

Z.32.i) Wysokość ostrosłupa jest równa długości najkrótszej krawędzi bocznej, która jest o 1 cm dłuższa od krawędzi podstawy ostrosłupa. Podstawą tego ostrosłupa jest kwadrat o boku 3 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

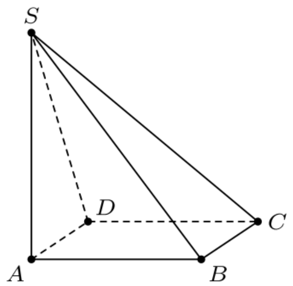
Z.32.j) Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 169 cm^2. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe 144 cm^2. Oblicz długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa.

Z.32.k) Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe $36\sqrt{3}$ cm^2. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe $27\sqrt{3}$ cm^2. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

Z.32.l) Każda z krawędzi bocznych ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość

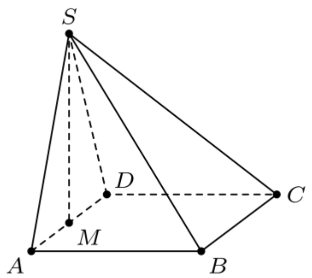
8 cm, a każda z krawędzi podstawy tego ostrosłupa ma długość 4 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Z.32.m) Prostokąt *ABCD* jest podstawą ostrosłupa *ABCDS*, krawędź *AS* jest wysokością tego ostrosłupa. Dane są następujące długości krawędzi: $AS = 12$ cm, $DS = 13$ cm, $BS = 15$ cm.



Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Z.32.n) Prostokąt *ABCD* jest podstawą ostrosłupa *ABCDS*, punkt *M* jest środkiem krawędzi *AD*, odcinek *MS* jest wysokością ostrosłupa. Dane są następujące długości krawędzi: $AD = 10$ cm, $AS = 13$ cm oraz $AB = 20$ cm.



Oblicz objętość tego ostrosłupa.

33. Wprowadzenie do kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa.

Uczeń powinien:

33.1. obliczać, ile jest obiektów, mających daną własność, w przypadkach niewymagających stosowania reguł mnożenia i dodawania;

33.2. obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach losowych, polegających na rzucie monetą, rzucie sześcienną kostką do gry, rzucie kostką wielościenną lub losowaniu kuli spośród zestawu kul.

Przykładowe zadania

Z.33.a) Ile jest par (a,b) liczb całkowitych dodatnich takich, że $a+b=12$ (pary różniące się kolejnością liczb uważamy za różne)?

Z.33.b) Ile jest liczb parzystych od 12 do 58?

Z.33.c) Ile jest liczb od 10 do 99, które są podzielne przez 7?

Z.33.d) Rzucamy sześcienną kostką do gry (tzn. taką, która ma na ściankach liczby oczek od 1 do 6). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyrzucimy liczbę oczek podzielną przez 3?

Z.33.e) Rzucamy kostką dwudziestościenną (tzn. taką, która ma na ściankach liczby oczek od 1 do 20). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyrzucimy liczbę oczek podzielną przez 3?

Z.33.f) W urnie znajduje się 16 kul, w tym 11 kul białych. Losujemy z urny jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosowana kula nie jest biała?

Z.33.g) W urnie znajdują się kule ponumerowane liczbami dwucyfrowymi od 12 do 58 włącznie (po jednej kuli dla każdej liczby od 12 do 58). Losujemy z urny jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy kulę z numerem będącym liczbą parzystą?

Z.33.h) W urnie znajduje się 90 kul ponumerowanych liczbami dwucyfrowymi (tzn. kolejnymi liczbami całkowitymi od 10 do 99). Losujemy z urny jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wylosujemy kulę z numerem podzielnym przez 7?

34. Odczytywanie danych i elementy statystyki opisowej.

Uczeń powinien:

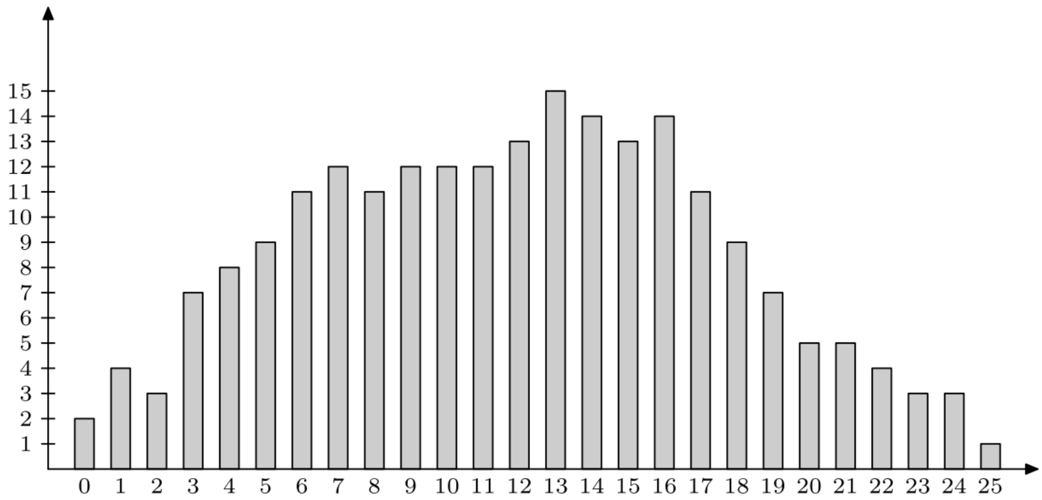
34.1. tworzyć diagramy słupkowe i kołowe oraz wykresy liniowe na podstawie zebranych przez siebie danych lub danych pochodzących z różnych źródeł (na przykład dane Głównego Urzędu Statystycznego);

34.2. odczytywać dane z diagramów słupkowych i kołowych oraz wykresów;

34.3. obliczać średnią arytmetyczną kilku liczb.

Przykładowe zadania

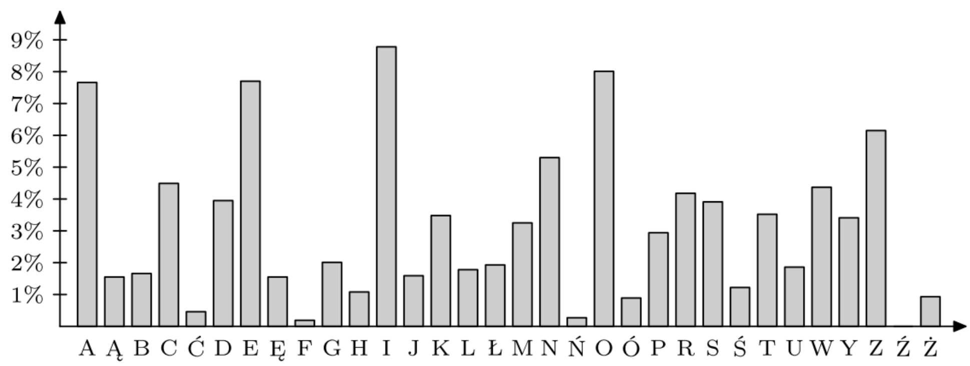
Z.34.a) W konkursie matematycznym startowało 220 uczniów. Każdy zawodnik mógł uzyskać maksymalnie 25 punktów. Poniższy diagram słupkowy pokazuje, ilu uczniów uzyskało poszczególne liczby punktów, od 0 do 25. Do następnego etapu konkursu przechodzi 20% uczestników, którzy uzyskali najlepsze wyniki. Grześ dostał 19 punktów. Czy przejdzie on do następnego etapu?

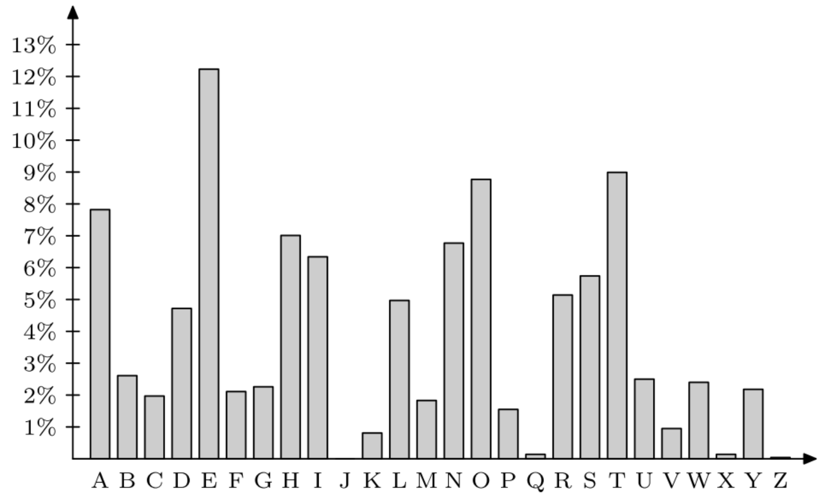


(Odp. tak).

Z.35.b) Wybierz stronę dowolnego tekstu napisanego w języku polskim. Policz wszystkie litery w tym tekście oraz policz liczbę wystąpień każdej litery alfabetu polskiego. Możesz to łatwo zrobić zapisując cały tekst na przykład w programie *Word*, a następnie zamieniając każdą literę na przykład na gwiazdkę (użyj: *Zamień*, a następnie *Zamień wszystko*; komputer wskaże Ci liczbę dokonanych zamian – jest to liczba wystąpień zamienianej litery w całym tekście). Oblicz częstość występowania każdej litery w całym tekście. Sporządź diagram słupkowy znalezionych częstości występowania. Porównaj otrzymany diagram z diagramami otrzymanymi przez Twoich kolegów na podstawie wybranych przez nich tekstów. Czy te diagramy są podobne? Zrób analogiczne ćwiczenie dla tekstów napisanych w innych językach (na przykład po angielsku). Czy otrzymane diagramy częstości są podobne do diagramów dla języka polskiego?

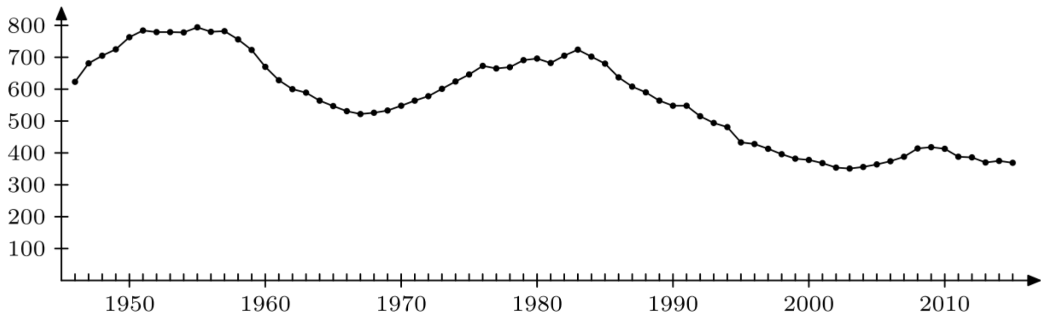
Odp. odpowiednie diagramy słupkowe sporządzone na podstawie pierwszych 72 wersów *Pana Tadeusza* oraz pierwszych czterech akapitów powieści *Hobbita* wyglądają następująco:





Z.34.c) Znajdź dane dotyczące liczby urodzin dzieci w Polsce w latach 1946–2015. Sporządź wykres liniowy tych danych (odpowiednio zaokrąglonych). Czy możesz wyjaśnić skąd się biorą znaczne różnice w liczbie urodzin (tzw. wyże i niże demograficzne)?

Odp.: ten wykres wygląda następująco (dane w tysiącach urodzin):



Z.34.d) Oblicz średnią arytmetyczną następujących 10 liczb: 2, 5, 5, 7, 7, 7, 9, 12, 13, 13.

Z.34.e) Grześ dostał 10 ocen z matematyki. Oto 9 z nich: 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6. Średnia arytmetyczna wszystkich dziesięciu jego ocen jest równa $3,6$. Jaka jest jego dziesiąta ocena?

Z.34.f) Z meteorogramu odczytaj kiedy najszybciej będzie rosła temperatura (z godziny na godzinę). Podaj w jakich godzinach jednocześnie będzie rosła prędkość wiatru i ciśnienie, w jakich będzie rosła prędkość wiatru, a ciśnienie malało.

IV. Treści zalecane do nauczenia w czasie po egzaminie klasie VIII (niewymagane na egzaminie).

35. Symetrie.

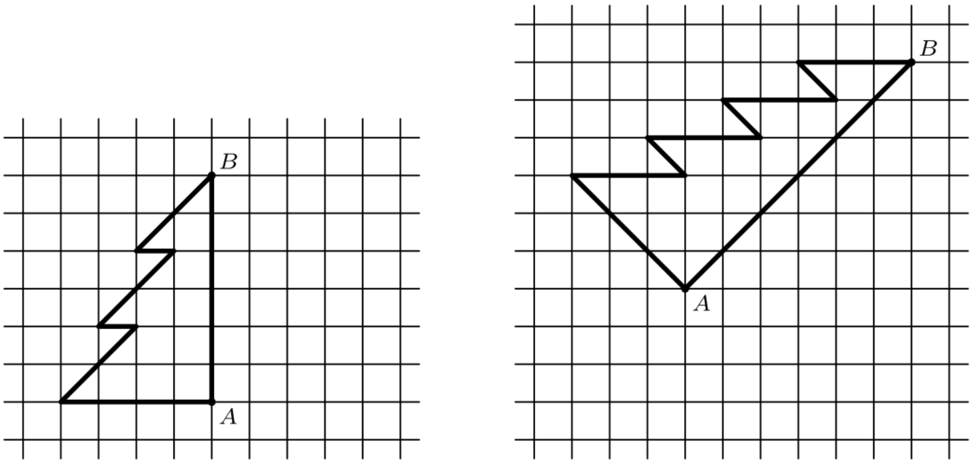
Uczeń powinien:

35.1. rozpoznawać figury osiowo-symetryczne i wskazywać ich osie symetrii oraz uzupełniać figurę do figury osiowo-symetrycznej przy danych: osi symetrii figury i części figury;

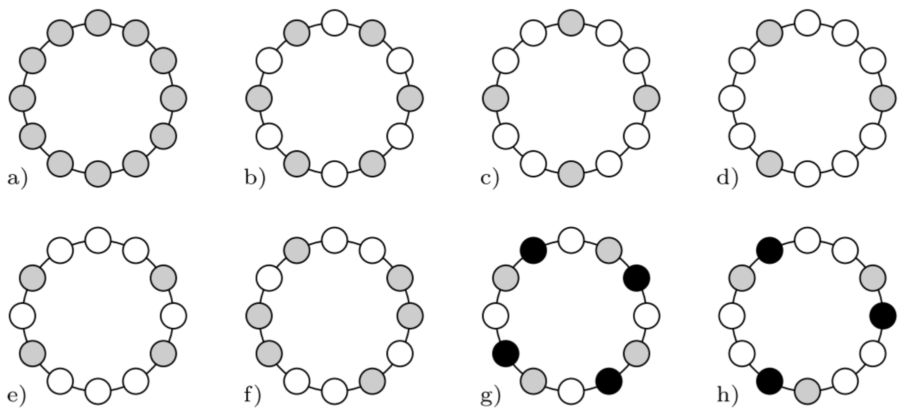
35.2. rozpoznawać figury środkowo-symetryczne i wskazywać ich środki symetrii.

Przykładowe zadania

Z.35.a) Uzupełnij poniższe rysunki tak, by prosta *AB* była osią symetrii otrzymanego wielokąta.



Z.35.b) W każdym z poniższych naszyjników złożonych z 12 koralików znajdź liczbę osi symetrii oraz ustal, czy dany naszyjnik ma środek symetrii. Uwzględnij kolory koralików (białe, szare i czarne).



36. Symetralna odcinka i dwusieczna kąta.

Uczeń powinien:

36.1. rozpoznawać symetralną odcinka i dwusieczną kąta;

36.2 umieć udowodnić, że punkty leżące na symetralnej odcinka są jednakowo oddalone od końców tego odcinka;

36.3 umieć udowodnić, że punkty jednakowo oddalone od końców odcinka leżą na symetralnej tego odcinka.

Przykładowe zadania

Z.36.a) Wierzchołek *C* rombu *ABCD* leży na symetralnych boków *AB* i *AD*. Oblicz kąty tego rombu.

Z.36.b) Dwusieczne kątów *BAC* i *ABC* trójkąta *ABC* przecinają się w punkcie *S*. Ponadto $\sphericalangle ACB = 104^\circ$. Oblicz kąt *ASB*.

37. Zaawansowane metody zliczania.

Uczeń powinien:

37.1. stosować regułę mnożenia do zliczania par lub trójek elementów o określonych własnościach;

37.2. stosować regułę dodawania i mnożenia do zliczania par lub trójek elementów w sytuacjach, wymagających rozważenia kilku przypadków.

Przykładowe zadania

Z.37.a) Ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych (tzn. od 10 do 99), w których obie cyfry są różne?

Z.37.b) Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych zapisanych za pomocą cyfr 1, 2, 3, 4 i 5?

Z.37.c) Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych, w zapisie których nie występuje zero i mających trzy różne cyfry?

Z.37.d) Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 5 i mających trzy różne cyfry?

38. Rachunek prawdopodobieństwa.

Uczeń powinien:

38.1. obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach, polegających na rzucie dwiema kostkami lub losowaniu dwóch elementów ze zwracaniem;

38.2 obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach, polegających na losowanie dwóch elementów bez zwracania.

Przykładowe zadania

Z.38.a) Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy 8 w rzucie dwiema sześciennymi kostkami do gry.

Z.38.b) Z urny zawierającej kule ponumerowane liczbami od 1 do 7 losujemy ze zwracaniem dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma liczb na wylosowanych kulach będzie parzysta.

Z.38.c) Z urny zawierającej kule ponumerowane liczbami od 1 do 7 losujemy ze zwracaniem dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma liczb na wylosowanych kulach będzie większa od 10.

Z.38.d) Z urny zawierającej kule ponumerowane liczbami od 1 do 7 losujemy bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma liczb na wylosowanych kulach będzie parzysta.

Z.38.e) Z urny zawierającej kule ponumerowane liczbami od 1 do 7 losujemy bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma liczb na wylosowanych kulach będzie większa od 10.

Zalecane warunki i sposób realizacji

(treści napisane kursywą są skopiowane z poprzedniej podstawy programowej z matematyki)

Etap konkretny

Na etapie konkretnym, a więc ramowo w klasach IV–VI, należy przede wszystkim zadbać o pracę na konkretnych przykładach, bez wprowadzania nadmiaru pojęć abstrakcyjnych.

Dużą pomocą dla ucznia jest możliwość eksperymentowania z liczbami, rozwiązywania zagadek logicznych i logiczno-matematycznych, a także ćwiczenia, wymagające pracy z kształtami w geometrii.

Czynny udział w zdobywaniu wiedzy matematycznej przybliża dziecko do matematyki, rozwija kreatywność, umożliwia samodzielne odkrywanie związków i zależności; duże możliwości *samodzielnych obserwacji i działań stwarza geometria, ale także w arytmetyce można znaleźć obszary, gdzie uczeń może czuć się odkrywcą.*

Ćwiczenia wymagające posługiwania się arytmetyką nie tylko rozwijają zdolności rachunkowe i umiejętności twórczego rozwiązywania problemów, ale również oswajają z matematyką, co jest ważne zwłaszcza dla uczniów, którzy są przekonani o braku własnych uzdolnień matematycznych. Lepienie kształtów figur geometrycznych, sklejanie modeli z siatek pozwala na rozwój wyobraźni przestrzennej.

Na etapie konkretnym, uczeń nie powinien być zobowiązany do nauki regułek i definicji. Należy rozwijać precyzję wypowiedzi, ale bez oczekiwania, że uczeń będzie w stanie bezbłędnie używać języka matematycznego na tym etapie nauki. Należy unikać sytuacji, w których uczeń uzdolniony matematycznie może być zakwalifikowany do grupy słabych uczniów ze względu na brak umiejętności precyzyjnego formułowania odpowiedzi. Umiejętność zapisu własnego toku myślenia nie musi iść w parze z umiejętnością rozumowania; wymuszanie nadmiernej precyzji, często sztucznej, może hamować rozwój matematyczny uczniów zdolnych.

Niezwykle ważnym elementem kształcenia matematycznego na tym etapie jest praca z tekstem, czyli rozwiązywanie zadań tekstowych w miarę możliwości powiązanych z sytuacjami z życia codziennego. Takie zadania nie tylko pokazują dokładnie, jak uczeń rozumuje, ale prowadzą ucznia w kierunku samodzielnego budowania prostych modeli matematycznych do opisu zjawisk codziennych. Ponadto umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych jest istotna w kontekście korelacji matematyki z innymi przedmiotami ścisłymi.

Jeśli chodzi o sprawność rachunkową, większość uczniów i tak w praktyce korzysta z kalkulatorów bądź innych urządzeń elektronicznych. Niemniej, zarówno umiejętność wykonywania rachunków w pamięci, a także pisemnie jest istotna. Obliczenia pamięciowe, w tym szacowanie wyników, bardzo przydają się w życiu codziennym, na przykład w sklepie. Samodzielne wykonywanie rachunków, zarówno pamięciowych jak i pisemnych, daje uczniom o wiele lepsze wyobrażenie o liczbach i ich wielkościach, niż działania na sprzęcie elektronicznym.

Należy jednak postarać się o to, aby matematyka była dla ucznia przyjazna, nie odstraszała przesadnie skomplikowanymi i żmudnymi rachunkami, których trudność jest sztuką samą dla siebie i nie prowadzi do głębszego zrozumienia zagadnienia.

Na etapie konkretnym zadania, które prowadzą do równań z jedną niewiadomą, można rozwiązywać metodą prób i błędów. Taka metoda powinna być uważana za równoprawną na tym etapie kształcenia. Należy zadbać o to, aby uczeń mógł weryfikować sensowność wyników, na przykład sprawdzać, czy w zadaniu nie wychodzi, że beton jest lżejszy od wody.

Etap formalny

Myślenie abstrakcyjne kształtuje się w wieku 11–15 lat, ale u wielu dzieci w różnym tempie, przy czym szybkość tego rozwoju nie musi oznaczać większych bądź mniejszych zdolności matematycznych. Z uwagi na tę różną szybkość rozwoju wśród uczniów klas VII–VIII (a także, częściowo VI) można rozważyć wprowadzenie nauczania międzyoddziałowego matematyki na różnych poziomach, podobnie jak to nierzadko jest wprowadzane w nauczaniu języków obcych. Różne grupy wprowadzałyby różne partie materiału w tempie dostosowanym do możliwości konkretnych uczniów, przy zachowaniu realizacji podstawy programowej. Takie podejście nie powinno dzielić uczniów na lepszych lub gorszych, ale ma umożliwić uczniom, u których myślenie abstrakcyjne rozwija się wolniej, płynne przejście do etapu myślenia abstrakcyjnego. Uczniom, u których to myślenie rozwinęło się szybciej, należy proponować zadania trudniejsze i pozwalające na głębszą analizę zagadnień, aby właściwie stymulować ich rozwój.

Zadania na dowodzenie stanowią ważny element wykształcenia matematycznego. Dostrzeganie zależności pomiędzy liczbami, kątami lub długościami odcinków w geometrii jest trudne, ale nie mniej ważne niż zapamiętywanie ćwiczonych schematów postępowania. Początkowo dowody powinny składać się z bardzo niewielkiej liczby kroków uzasadniających tezę. Uczeń powinien dowiedzieć się, że w twierdzeniach zaczynających się od słów „wykaż, że dla każdego…" podawanie wielu przykładów nie jest dowodem, podanie jednego kontrprzykładu świadczy o tym, że stwierdzenie nie jest prawdziwe. Nie oznacza to, że uczeń nie powinien szukać przykładów bądź kontrprzykładów. Często takie poszukiwanie i sprawdzanie prawdziwości tezy dla konkretnych przypadków pozwala uczniowi zrozumieć postawiony problem, a następnie podać ogólne rozumowanie. Nie należy ograniczać się do rozpatrywania wyjątkowych, szczególnych („skrajnych”) przypadków.

Zagadnienia ze stereometrii powinny być wprowadzane w sposób obrazowy, w którym uczeń wskazuje obiekty, przedmioty przypominające kształtem prostopadłościan, ostrosłup, walec, stożek, kulę, jak również wykonuje modele tych brył oraz tworzy ich różne przekroje. Geometria przestrzenna, często traktowana przez uczniów jako dziedzina bez zastosowań i uprawiana jako sztuka dla sztuki, może być ukazana jako przygotowanie do nauki nowoczesnych technologii komputerowych, np. grafika 3D czy też druk trójwymiarowy. Można też ukazać uczniom związki z chemią i fizyką, niekoniecznie poprzez konkretne zadania, na które może być jeszcze za wcześnie, ale jako motywację do nauki stereometrii.

Podawane w niniejszej podstawie zadania dotyczące figur rysowanych na kartce w kratkę nie pojawiały się w poprzedniej podstawie, ale doświadczenie uczy, że jest to bardzo dobre przygotowanie uczniów do abstrakcyjnego pojęcia układu współrzędnych. Ponadto umożliwia to tworzenie różnorodnych zadań na obliczanie pól figur poprzez dopełnianie do figur prostszych albo podział na figury prostsze. Takie zadania nie tylko kształtują ogólne myślenie matematyczne, ale również budują intuicję dotyczącą pojęcia pola.

Zadania z kombinatoryki pojawiały się już w wielu podręcznikach na różnych etapach. Ich celem jest kształcenie myślenia matematycznego na przykładach łatwych problemów, które jednak wymagają kilku kroków postępowania. Pozwalają one na przejście od konkretnych przykładów zliczania do bardziej abstrakcyjnych zadań kombinatorycznych. Można przy tej okazji ukazywać związki z informatyką.

Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa można poprzedzić wieloma zadaniami, w których uczniowie wykonują doświadczenia, po których można wskazać związek pomiędzy częstością zdarzenia a jego prawdopodobieństwem.

Zadania ze statystyki wiążą matematykę z codziennym życiem, dlatego wskazane jest, aby przynajmniej część zadań statystycznych dotyczyła danych rzeczywistych wraz z podaniem ich weryfikowalnego źródła.

Dużą pomocą dla ucznia i nauczyciela mogą być popularne książki matematyczne. Niektóre przykłady z klasycznych pozycji literatury, znakomicie nadają się do budowania intuicji matematycznych zarówno na etapie konkretnym jak i formalnym.

---

1. [i] M. Jurdziński, "Podstawy nawigacji morskiej", Fundacja Rozwoju Akademii Morskiej w Gdyni, Gdynia 2003, s. 44, wzór (1.28).